Fachrichtung Mathematik
Fakultät für Mathematik und Informatik
Universität des Saarlandes
Prof. Dr. Michael Bildhauer
M.Sc. Nils Gutheil

07.01.2020

Höhere Mathematik für (Naturwiss. und) Ingenieure I
Bachelor plus MINT Präsenzübung, Blatt 15

Aufgabe 1. Es sei $U \subset \mathbb{R}$.

i) Zeigen Sie, dass eine gleichmäßig konvergente Funktionenfolge *gleichmäßig beschränkt* ist, d.h. zeigen Sie: ist $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge beschränkter Funktionen $f_n\colon U \to \mathbb{R}$, die gleichmäßig gegen $f\colon U \to \mathbb{R}$ konvergiert, so gibt es $M \geq 0$ so, dass

$$\sup_{x\in U} |f_n(x)| \leq M$$

für alle $n \in \mathbb{N}$.

ii) Für $n \in \mathbb{N}$ seien $f_n\colon U \to \mathbb{R}$ und $g_n\colon U \to \mathbb{R}$ beschränkte Funktionen mit der Eigenschaft, dass die Funktionenfolgen $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ und $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen $f\colon U \to \mathbb{R}$ bzw. $g\colon U \to \mathbb{R}$ konvergieren.

(a) Zeigen Sie dass $\{f_n + g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen $f + g$ konvergiert.

(b) Zeigen Sie dass $\{f_n g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen fg konvergiert.

Aufgabe 2.

i) Für $n \in \mathbb{N}$ sei $f_n\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f_n(x) = \begin{cases} x^n, & 0 \leq x < 1, \\ 2^{-n}, & x \geq 1. \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie, dass $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ punktweise konvergiert.

(b) Zeigen Sie, dass die Konvergenz nicht gleichmäßig ist.

ii) Für $n \in \mathbb{N}$ seien $g_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $h_n\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$g_n(x) = \frac{nx}{1+n|x|}, \qquad h_n(x) = \frac{n\sin(x)}{1+n+\cos(x)}.$$

(a) Konvergieren $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ und $\{h_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ punktweise?

(b) Konvergieren $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ und $\{h_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig?

Bitte wenden.

Aufgabe 3. Es seien $U \subset \mathbb{R}$ und $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von beschränkten Funktionen $f_n \colon U \to \mathbb{R}$, die gleichmäßig gegen $f \colon U \to \mathbb{R}$ und punktweise gegen $g \colon U \to \mathbb{R}$ konvergiert. Zeigen Sie, dass

$$f(x) = g(x)$$

für alle $x \in U$.

[Hinweis: Zeigen Sie, dass $|f(x) - g(x)| < \varepsilon$ für alle $\varepsilon > 0$ und alle $x \in U$.]