Fachrichtung Mathematik
Fakultät für Mathematik und Informatik
Universität des Saarlandes
Prof. Dr. Michael Bildhauer
M.Sc. Nils Gutheil

08.01.2020

Höhere Mathematik für (Naturwiss. und) Ingenieure I
Bachelor plus MINT Präsenzübung, Blatt 16

Aufgabe 1. Für $n \in \mathbb{N}$ sei $f_n \colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f_n(x) = \begin{cases} x^n, & 0 \le x < 1, \\ 2^{-n}, & x \ge 1. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass durch die Funktionenreihe

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

eine Funktion $f \colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ definiert ist und skizzieren Sie den Graphen von f.

Aufgabe 2. Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergieren die folgenden Reihen?

$i)$ $\sum_{k=1}^{\infty} k^2 (x-2)^k$

$ii)$ $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} (x-2)^k$

$iii)$ $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^{-k}}{2^k} (x-6)^k$

$iv)$ $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k(k^2+1)} x^k$

$v)$ $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{2^k}{k} (x+1)^k$

$vi)$ $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(-3)^k}$

Aufgabe 3.

$i)$ Zeigen Sie, dass

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) x^n$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 1$.

[Hinweis: verwenden Sie die Formel für die geometrische Reihe und das Cauchy-Produkt.]

$ii)$ Berechnen Sie $\sum_{n=1}^{\infty} n e^{-n}$.