Fachrichtung Mathematik
Fakultät für Mathematik und Informatik
Universität des Saarlandes
Prof. Dr. Michael Bildhauer
M.Sc. Nils Gutheil

14.01.2020

Höhere Mathematik für (Naturwiss. und) Ingenieure I
Bachelor plus MINT Präsenzübung, Blatt 17

Aufgabe 1. Es seien $\mathbb{K}$ ein Körper und V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Zeigen Sie, dass eine Teilmenge $U \subset V$ genau dann ein Unterraum von V ist, wenn die folgenden drei Bedingungen erfüllt sind:

i) $\underline{\mathbf{0}} \in U$.

ii) $\underline{\mathbf{v}}, \underline{\mathbf{w}} \in U \Rightarrow \underline{\mathbf{v}} + \underline{\mathbf{w}} \in U$.

iii) $\underline{\mathbf{v}} \in U, \alpha \in \mathbb{K} \Rightarrow \alpha\underline{\mathbf{v}} \in U$.

Aufgabe 2.

i) Prüfen Sie die Vektoren

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$$

auf lineare Abhängigkeit.

ii) Für welchen Werte von $t \in \mathbb{R}$ sind die Vektoren

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ t^2 \end{pmatrix}$$

linear unabhängig?

iii) Ist die Menge

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ t^2 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}$$

ein Unterraum von $\mathbb{R}^3$?

Bitte wenden.

Aufgabe 3. Es seien $\mathbb{K}$ ein Körper und V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Zeigen Sie mit Hilfe der Vektorraumaxiome (Definition 10.1), dass die folgenden Aussagen für alle $\alpha \in \mathbb{K}$ und alle $\underline{\mathbf{v}} \in V$ gelten.

i) $\alpha \cdot \underline{\mathbf{0}} = 0 \cdot \underline{\mathbf{v}} = \underline{\mathbf{0}}$.

ii) $\alpha \cdot (-\underline{\mathbf{v}}) = (-\alpha) \cdot \underline{\mathbf{v}} = -(\alpha \cdot \underline{\mathbf{v}})$.