Fachrichtung Mathematik
Fakultät für Mathematik und Informatik
Universität des Saarlandes
Prof. Dr. Michael Bildhauer
M.Sc. Nils Gutheil

15.01.2020

Höhere Mathematik für (Naturwiss. und) Ingenieure I
Bachelor plus MINT Präsenzübung, Blatt 18

Aufgabe 1. Es seien $\mathbb{K}$ ein Körper, V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und U_1, U_2 Unterräume von V.

i) Zeigen Sie, dass die Menge $U_1 \cap U_2$ ein Unterraum von V ist.

ii) Finden Sie ein Beispiel für V, U_1 und U_2 so, dass $U_1 \cup U_2$ kein Unterraum von V ist.

Aufgabe 2. Es seien

$$\underline{\mathbf{v}}^{(1)} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \underline{\mathbf{v}}^{(2)} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \underline{\mathbf{w}}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \underline{\mathbf{w}}^{(2)} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Außerdem seien $U_1 = \text{Spann}(\underline{\mathbf{v}}^{(1)}, \underline{\mathbf{v}}^{(2)})$ und $U_2 = \text{Spann}(\underline{\mathbf{w}}^{(1)}, \underline{\mathbf{w}}^{(2)})$. Geben Sie eine Basis von $U_1 \cap U_2$ an.

Aufgabe 3. Bestimmen Sie

$$\dim \text{Spann}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 4 \\ 13 \end{pmatrix} \right).$$

Aufgabe 4. Es seien $\mathbb{K}$ ein Körper, V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $\underline{\mathbf{v}}^{(1)}, \ldots, \underline{\mathbf{v}}^{(k)} \in V$. Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

i) Ist $\text{Spann}(\underline{\mathbf{v}}^{(1)}, \ldots, \underline{\mathbf{v}}^{(k)}) = V$, so ist auch

$$\text{Spann}(\underline{\mathbf{v}}^{(1)} - \underline{\mathbf{v}}^{(2)}, \underline{\mathbf{v}}^{(2)} - \underline{\mathbf{v}}^{(3)}, \ldots, \underline{\mathbf{v}}^{(k-1)} - \underline{\mathbf{v}}^{(k)}, \underline{\mathbf{v}}^{(k)}) = V.$$

ii) Sind $\underline{\mathbf{v}}^{(1)}, \ldots, \underline{\mathbf{v}}^{(k)}$ linear unabhängig, so sind auch

$$\underline{\mathbf{v}}^{(1)} - \underline{\mathbf{v}}^{(2)}, \underline{\mathbf{v}}^{(2)} - \underline{\mathbf{v}}^{(3)}, \ldots, \underline{\mathbf{v}}^{(k-1)} - \underline{\mathbf{v}}^{(k)}, \underline{\mathbf{v}}^{(k)}$$

linear unabhängig.