Fachrichtung 6.1 – Mathematik
Universität des Saarlandes
Prof. Dr. Michael Bildhauer
M.Sc. Christian Tietz, M.Sc. Jan Müller

Saarbrücken, 16.02.2016

Klausur Höhere Mathematik für (Naturwiss. und) Ingenieure I

Die folgende Klausur besteht aus 4 Aufgaben. Die in den einzelnen Aufgabenteilen erreichbare Punktzahl ist jeweils angegeben, ebenso die Themengebiete, aus denen die Aufgabe gewählt wurde. Jede Aufgabe ist auf einem gesonderten Blatt zu bearbeiten. Achten Sie auf eine saubere Argumentation, d.h.: **Schreiben Sie alle Lösungsschritte hin und begründen Sie diese – auch wenn eine Aufgabe als Frage formuliert ist, ist die Antwort selbstverständlich zu begründen**, für "geratene" Lösungen kann es keine Punkte geben.

Aufgabe 1. (Aussagen und Mengen, vollständige Induktion, Kombinatorik; **3+(2.5+2.5) +(1+1) Punkte**)

i) Es seien A und B Mengen. Zeigen Sie

$$(A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B)\ .$$

Fertigen Sie dazu zunächst eine Skizze an.

ii) Zeigen Sie für alle $n \in \mathbb{N}$:

(a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$;

(b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k2^k = 2 + 2^{n+1}(n-1)$.

iii) Sie entnehmen einem Bücherregal mit 10 Büchern ein Buch und stellen es später wieder an seinen Platz zurück. Das wiederholen Sie weitere 2 Mal.

(a) Wie viele Möglichkeiten gibt es, wenn die Reihenfolge keine Rolle spielt und ein Buch auch mehrfach entnommen werden darf?

(b) Wie viele Möglichkeiten gibt es, wenn die Reihenfolge berücksichtigt wird und ein Buch nicht mehrfach entnommen werden darf?

Bitte wenden.

Aufgabe 2. (Folgen, Reihen, Potenzreihen; **(1+1+1)+2+3+2 Punkte**)

i) Existieren die folgenden Grenzwerte und wenn ja, berechnen Sie diese:

$$\text{(a)}\ \lim_{n\to\infty} \frac{n^2 - \frac{1}{n} - 1}{n^3 - n^2}\ , \qquad \text{(b)}\ \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{2}n^4 + \frac{1}{\sqrt{n}} - n^2}{n^3 + 2n^4}\ , \qquad \text{(c)}\ \lim_{n\to\infty} \frac{n^4 + 1}{\frac{1}{2}n^3 + 1}\ .$$

ii) Betrachten Sie die reelle Zahlenfolge $\{a_n\}$,

$$a_n = \frac{n^2}{n^2 + 1} \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}\ .$$

Finden Sie ein $a \in \mathbb{R}$ und zu gegebenem $\varepsilon > 0$ ein $N = N(\varepsilon)$ derart, dass $|a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n > N(\varepsilon)$.

iii) Betrachten Sie die rekursiv definierte Folge $\{a_n\}$ mit

$$a_1 := 1\ , \qquad a_{n+1} := a_n \left(\frac{1}{2 + \frac{1}{n}} \right)\ .$$

Konvergiert die Folge? Falls ja, bestimmen Sie den Grenzwert.

iv) Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergiert die Potenzreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} (x-3)^n\ ?$$

Aufgabe 3. (Vektorrechnung; **(2+2)+3.5+2.5 Punkte**)

i) Im $\mathbb{R}^3$ seien

$$\underline{\mathbf{v}}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\ , \quad \underline{\mathbf{v}}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\ , \quad \underline{\mathbf{v}}^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\ , \quad \underline{\mathbf{v}}^{(4)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\ .$$

(a) Wählen Sie aus $\underline{\mathbf{v}}^{(1)}$, $\underline{\mathbf{v}}^{(2)}$, $\underline{\mathbf{v}}^{(3)}$ und $\underline{\mathbf{v}}^{(4)}$ geeignete Vektoren aus und zeigen Sie, dass es sich um eine Basis des $\mathbb{R}^3$ handelt.

(b) Bestimmen Sie

$$\dim \operatorname{Spann}(\underline{\mathbf{v}}^{(1)}, \underline{\mathbf{v}}^{(2)}, \underline{\mathbf{v}}^{(3)})\ .$$

ii) Es seien

$$\underline{\mathbf{w}}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\ , \quad \underline{\mathbf{w}}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\ , \quad \underline{\mathbf{w}}^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\ .$$

Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis von $\operatorname{Spann}(\underline{\mathbf{w}}^{(1)}, \underline{\mathbf{w}}^{(2)}, \underline{\mathbf{w}}^{(3)})$.

iii) Im $\mathbb{R}^3$ sei für fixiertes $a \in \mathbb{R}$

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ a \end{pmatrix} \right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} .$$

Bestimmen Sie $U^\perp$.

Aufgabe 4. (Gemischte Aufgaben: Ungleichungen und Beträge, Polynominterpolation, Hessesche Normalform, Topologie des $\mathbb{R}^n$; **2.5+2.5+3+2 Punkte**)

i) Geben Sie die folgende Menge reeller Zahlen in Form eines Intervalls oder einer Vereinigung solcher an:

$$\{x \in \mathbb{R} : \ |x+4| + |x| - x - 8 < 0\} .$$

ii) Gegeben sei die Wertetabelle

j	0	1	2
x_j	-1	0	2
y_j	3	1	3

und es sei $p_2(x)$ das Interpolationspolynom zu den Stützstellen x_j mit den Werten y_j, $0 \leq j \leq 2$.

Berechnen Sie $p_2(x)$ mittels der Newtonschen Darstellung (dividierte Differenzen).

iii) Gegeben seien die Punkte

$$\underline{\mathbf{a}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} , \quad \underline{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} , \quad \underline{\mathbf{c}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Bestimmen Sie die Hessesche Normalform der durch $\underline{\mathbf{a}}$, $\underline{\mathbf{b}}$, $\underline{\mathbf{c}}$ verlaufenden Ebene.

iv) Ist die Menge

$$U = \{\underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^2 : \ 0 < \|x\| \leq 1\}$$

offen? Ist Sie abgeschlossen? Begründen Sie Ihre Antworten.