Fachrichtung 6.1 – Mathematik
Universität des Saarlandes
Prof. Dr. Michael Bildhauer
M.Sc. Daniel Kraemer

Saarbrücken, 22.02.2018

Klausur Höhere Mathematik für (Naturwiss. und) Ingenieure I

Die folgende Klausur besteht aus 4 Aufgaben. Die in den einzelnen Aufgabenteilen erreichbare Punktzahl ist jeweils angegeben, ebenso die Themengebiete, aus denen die Aufgabe gewählt wurde. Jede Aufgabe ist auf einem gesonderten Blatt zu bearbeiten. Achten Sie auf eine saubere Argumentation, d.h.: **Schreiben Sie alle Lösungsschritte hin und begründen Sie diese – auch wenn eine Aufgabe als Frage formuliert ist, ist die Antwort selbstverständlich zu begründen**, für "geratene" Lösungen kann es keine Punkte geben.

Aufgabe 1. (Aussagen und Mengen, vollständige Induktion, Kombinatorik; **4 + (2+2) + (1+1) Punkte**)

i) Es seien A, B, C Mengen. Verdeutlichen Sie die folgende Beziehung zunächst anhand eines Venn-Diagrammes und geben Sie anschließend einen formalen Beweis:

$$(A - B) \cup (B - C) = (A \cup B) - (B \cap C)\,.$$

ii) Zeigen Sie mithilfe vollständiger Induktion:

(a) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}\,.$$

(b) Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $5^n - 1$ durch 4 teilbar.

iii) Für einen überbuchten Flug können nur noch 3 Tickets ausgestellt werden, 10 verbleibende Passagiere möchten aber mit einem der Tickets fliegen.

Wieviele Möglichkeiten gibt es, drei Passagiere auszuwählen,

(a) wenn alle Tickets gleich sind;

(b) wenn die drei Tickets unterschiedlich sind?

Bitte wenden.

Aufgabe 2. (Folgen, Reihen, Potenzreihen; **(1.5+1) + 2 + 2.5 + 1 + 2 Punkte**)

i) Existieren die folgenden Grenzwerte und falls ja, berechnen Sie diese:

$$\text{(a)} \lim_{n\to\infty} \frac{n^4 - 3n^2}{3n^2 - 1}\ , \qquad \text{(b)} \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}\, \frac{n^4+1}{\frac{1}{2}n^4 + 1}\ .$$

ii) Betrachten Sie die reelle Zahlenfolge $\{a_n\}$,

$$a_n = \frac{2\sqrt{n}+1}{\sqrt{n}} \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}\ .$$

Finden Sie ein $a \in \mathbb{R}$ und zu gegebenem $\varepsilon > 0$ ein $N = N(\varepsilon)$ derart, dass $|a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n > N(\varepsilon)$.

iii) Betrachten Sie die rekursiv definierte Folge $\{a_n\}$ mit

$$a_1 := 1\ , \qquad a_{n+1} := \frac{1+a_n}{2+a_n}\ .$$

Ist die Folge nach unten beschränkt? Ist die Folge monoton fallend? Konvergiert die Folge? Falls ja, bestimmen Sie den Grenzwert.

iv) Konvergiert die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{1+\frac{1}{k}}\ ?$$

v) Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergiert die Potenzreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}(x+1)^n\ ?$$

Aufgabe 3. (Vektorrechnung; **4.5 + 4.5 + 1 Punkte**)

i) Es seien a, $b \in \mathbb{R}$ fixiert. Betrachten Sie im $\mathbb{R}^3$ die Vektoren

$$\underline{\mathbf{u}}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 1 \end{pmatrix}\ , \quad \underline{\mathbf{u}}^{(2)} = \begin{pmatrix} b \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\ , \quad \underline{\mathbf{u}}^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\ .$$

Bestimmen Sie die Dimension von $\mathrm{Spann}(\underline{\mathbf{u}}^{(1)}, \underline{\mathbf{u}}^{(2)})$ und von $\mathrm{Spann}(\underline{\mathbf{u}}^{(1)}, \underline{\mathbf{u}}^{(3)})$. Bestimmen Sie im Fall $a = 2$ die Dimension von $\mathrm{Spann}(\underline{\mathbf{u}}^{(1)}, \underline{\mathbf{u}}^{(2)}, \underline{\mathbf{u}}^{(3)})$.

ii) Betrachten Sie im $\mathbb{R}^4$ den Vektor

$$\underline{\mathbf{N}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

sowie den Unterraum $V = \{\underline{\mathbf{v}} \in \mathbb{R}^4 :\ \langle \underline{\mathbf{v}}, \underline{\mathbf{N}} \rangle = 0\}$ des $\mathbb{R}^4$.

(a) Zeigen Sie, dass die Vektoren

$$\underline{\mathbf{g}}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \underline{\mathbf{g}}^{(2)} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

in V liegen. Bestimmen Sie die Dimension von V und geben Sie eine Orthonormalbasis von V an.

(b) Bestimmen Sie $V^{\perp}$.

Aufgabe 4. (Gemischte Aufgaben: Abbildungseigenschaften, Ungleichungen und Beträge, Polynominterpolation, Analytische Geometrie, Topologie des $\mathbb{R}^n$; **2 + 2 + 2.5 + 2.5 + 1 Punkte**)

i) Es sei $M = \{1, 2, \ldots, 10\} \subset \mathbb{N}$ und zu fixiertem $n \in \mathbb{N}$ sei $N = \{1, 2, \ldots, n\} \subset \mathbb{N}$. Gibt es eine surjektive Abbildung $f\colon M \to N$?

ii) Zeigen Sie:

$$\{x \in \mathbb{R} : \; |x-2| + \big|2 - |x-2|\big| < 1\} = \emptyset \; .$$

iii) Gegeben sei die Wertetabelle

j	0	1	2
x_j	1	3	4
y_j	-2	2	7

und es sei $p_2(x)$ das Interpolationspolynom zu den Stützstellen x_j mit den Werten y_j, $0 \le j \le 2$.

Berechnen Sie $p_2(x)$ und $p_2(2)$ mittels der Lagrangeschen Darstellung.

iv) Im $\mathbb{R}^3$ seien die Vektoren

$$\underline{\mathbf{v}}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} , \quad \underline{\mathbf{v}}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

gegeben. Weiter sei E die Ebene, die von $\underline{\mathbf{v}}^{(1)}$, $\underline{\mathbf{v}}^{(2)}$ aufgespannt wird und den Punkt $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ enthält. Geben Sie eine Parameterdarstellung von E und die Hessesche Normalform von E an.

v) Ist die Menge $U = \{\underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^2 : \; 0 < x_1 < x_2\}$ beschränkt?