Fachrichtung 6.1 – Mathematik
Universität des Saarlandes
Prof. Dr. Michael Bildhauer
M.Sc. Christian Tietz, M.Sc. Jan Müller

Saarbrücken, 13.04.2016

Klausur Höhere Mathematik für (Naturwiss. und) Ingenieure I

Die folgende Klausur besteht aus 4 Aufgaben. Die in den einzelnen Aufgabenteilen erreichbare Punktzahl ist jeweils angegeben, ebenso die Themengebiete, aus denen die Aufgabe gewählt wurde. Jede Aufgabe ist auf einem gesonderten Blatt zu bearbeiten. Achten Sie auf eine saubere Argumentation, d.h.: **Schreiben Sie alle Lösungsschritte hin und begründen Sie diese – auch wenn eine Aufgabe als Frage formuliert ist, ist die Antwort selbstverständlich zu begründen**, für "geratene" Lösungen kann es keine Punkte geben.

Aufgabe 1. (Aussagen und Mengen, vollständige Induktion, Kombinatorik; **3+(2.5+2.5) +(1+1) Punkte**)

i) Es seien A und B Aussagen. Zeigen Sie anhand einer "Wahrheitstabelle", dass gilt

$$(\neg A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow A)\,.$$

ii) Zeigen Sie:

(a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$ für alle $n \in \mathbb{N}$;

(b) $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} k2^k = 2^{n+1}(n-1)$ für alle $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

iii) Betrachten Sie ein Rennen mit den Läufern $A1$, $A2$, $A3$, $A4$ aus dem Team A und den Läufern $B1$, $B2$, $B3$, $B4$ aus dem Team B.

Wie viele mögliche Rennausgänge gibt es und bei wie vielen möglichen Rennausgängen belegen die Läufer aus dem Team A den ersten und den zweiten Platz? (Zeitgleichheit von Läufern sei jeweils ausgeschlossen.)

Bitte wenden.

Aufgabe 2. (Folgen, Reihen, Potenzreihen; **(1+1+1)+2+(1.5+1.5)+2 Punkte**)

i) Existieren die folgenden Grenzwerte und falls ja, berechnen Sie diese:

$$\text{(a)} \lim_{n\to\infty} \frac{n^2 - \frac{1}{n^2} - \sqrt{n}}{n^{5/2} - n^2} \,, \qquad \text{(b)} \lim_{n\to\infty} \left[\frac{n}{n+1} + \frac{\frac{1}{2}n^4 + \frac{1}{\sqrt{n}} - n^2}{n^3 + 2n^4} \right] ,$$

$$\text{(c)} \lim_{n\to\infty} \frac{n^4+1}{\frac{n^3+1}{n}} \,.$$

ii) Betrachten Sie die reelle Zahlenfolge $\{a_n\}$,

$$a_n = \frac{\sqrt{2}+n}{n} \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N} \,.$$

Finden Sie ein $a \in \mathbb{R}$ und zu gegebenem $\varepsilon > 0$ ein $N = N(\varepsilon)$ derart, dass $|a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n > N(\varepsilon)$.

iii) Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz:

$$\text{(a)} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k - \sqrt{k}} \,, \qquad \text{(b)} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{\sqrt{k}} \,.$$

iv) Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergiert die Potenzreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n (x-3)^n \;?$$

Aufgabe 3. (Vektorrechnung; **(1+2+3+2)+(1+1) Punkte**)

i) Im $\mathbb{R}^4$ seien

$$\underline{\mathbf{v}}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} , \quad \underline{\mathbf{v}}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} , \quad \underline{\mathbf{v}}^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} , \quad \underline{\mathbf{v}}^{(4)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und es sei

$$U = \mathrm{Spann}(\underline{\mathbf{v}}^{(1)}, \underline{\mathbf{v}}^{(2)}, \underline{\mathbf{v}}^{(3)}, \underline{\mathbf{v}}^{(4)}) \,.$$

(a) Sind die Vektoren $\underline{\mathbf{v}}^{(1)}$, $\underline{\mathbf{v}}^{(2)}$, $\underline{\mathbf{v}}^{(3)}$, $\underline{\mathbf{v}}^{(4)}$ linear unabhängig?

(b) Bestimmen Sie $\dim U$.

(c) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis von U.

(d) Gilt

$$\mathrm{Spann}(\underline{\mathbf{v}}^{(1)}, \underline{\mathbf{v}}^{(2)}) = \mathrm{Spann}(\underline{\mathbf{v}}^{(3)}, \underline{\mathbf{v}}^{(4)}) \;?$$

ii) Es sei

$$U = \{\underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^2 : \ x_1^2 + x_2^2 = 1\} \ .$$

Ist U ein Unterraum des $\mathbb{R}^2$? Ist $U^\perp$ ein Unterraum des $\mathbb{R}^2$?

Aufgabe 4. (Gemischte Aufgaben: Ungleichungen und Beträge, Polynominterpolation, Hessesche Normalform, Topologie des $\mathbb{R}^n$; **2.5+2.5+3+2 Punkte**)

i) Geben Sie die folgende Menge reeller Zahlen in Form eines Intervalls oder einer Vereinigung solcher an:

$$\{x \in \mathbb{R} : \ |x+4| + \big||x| - x\big| - 8 < 0\} \ .$$

ii) Gegeben sei die Wertetabelle

j	0	1	2
x_j	-1	0	2
y_j	3	1	3

und es sei $p_2(x)$ das Interpolationspolynom zu den Stützstellen x_j mit den Werten y_j, $0 \le j \le 2$.

Berechnen Sie $p_2(1)$ mittels des Algorithmus von Neville.

iii) Im $\mathbb{R}^3$ seien die Gerade

$$G = \{\underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^3 : \ \ x_2 = 1 + x_1 \ , \ \ x_3 = 1\}$$

und der Punkt

$$\underline{\mathbf{a}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

gegeben. Bestimmen Sie die Hessesche Normalform der Ebene E im $\mathbb{R}^3$, die $\underline{\mathbf{a}}$ und G enthält.

iv) Ist die Menge

$$U = \{\underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^2 : \ 1 = \|x\|\}$$

offen? Ist Sie abgeschlossen? Begründen Sie Ihre Antworten.