Fachrichtung 6.1 – Mathematik
Universität des Saarlandes
Prof. Dr. Michael Bildhauer
M.Sc. Daniel Kraemer

Saarbrücken, 21.03.2018

Klausur Höhere Mathematik für (Naturwiss. und) Ingenieure I

Die folgende Klausur besteht aus 4 Aufgaben. Die in den einzelnen Aufgabenteilen erreichbare Punktzahl ist jeweils angegeben, ebenso die Themengebiete, aus denen die Aufgabe gewählt wurde. Jede Aufgabe ist auf einem gesonderten Blatt zu bearbeiten. Achten Sie auf eine saubere Argumentation, d.h.: **Schreiben Sie alle Lösungsschritte hin und begründen Sie diese – auch wenn eine Aufgabe als Frage formuliert ist, ist die Antwort selbstverständlich zu begründen**, für "geratene" Lösungen kann es keine Punkte geben (Ausnahme: Aufgabe 4, iv)).

Aufgabe 1. (Aussagen und Mengen, vollständige Induktion, Kombinatorik; **2.5 + (2.5+ 2.5) + (1+1.5) Punkte**)

i) Es seien A, B und C Aussagen. Die Implikation $A \Rightarrow B$ sei richtig, die Negation $\neg B$ sei richtig und die Implikation $C \Rightarrow A$ sei falsch.

Verifizieren Sie die Wahrheitswerte von A, B und C anhand einer "Wahrheitstabelle". Ist die Disjunktion $B \vee C$ richtig?

ii) Zeigen Sie mithilfe vollständiger Induktion:

(a) Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $n^3 - n$ durch 3 teilbar.

(b) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{k+1}{2^k} = 4 - \frac{n+3}{2^n} .$$

iii) Bei einer Produktumfrage füllen Sie einen Fragebogen mit fünf Fragen zu einem vorgestellten Produkt aus, wobei Sie jeweils mit "gut", "schlecht" oder "keine Angabe" antworten können.

(a) Wieviele Möglichkeiten gibt es, den Bogen auszufüllen?

(b) Das Produkt gilt von Ihnen insgesamt als "gut" bewertet, wenn Sie mindestens drei der Fragen mit "gut" beantworten. Wieviele Möglichkeiten haben Sie, das Produkt mit "gut" zu bewerten?

Bitte wenden.

Aufgabe 2. (Folgen, Reihen, Potenzreihen; **(1+1.5) + 2 + (1+1.5) + (2+1) Punkte**)

i) Existieren die folgenden Grenzwerte und falls ja, berechnen Sie diese:

$$\text{(a)}\quad \lim_{n\to\infty} \frac{n^2 - \frac{1}{n^2}}{n^{5/2} + (-1)^n n^2}\,, \qquad \text{(b)}\quad \lim_{n\to\infty} \left[\frac{n^2}{1+n} + \frac{n^3}{1-n^2}\right].$$

ii) Betrachten Sie die reelle Zahlenfolge $\{a_n\}$,

$$a_n = \frac{n + \frac{1}{2}\sqrt{n}}{n - \frac{1}{2}\sqrt{n}} \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}\,.$$

Finden Sie ein $a \in \mathbb{R}$ und zu gegebenem $\varepsilon > 0$ ein $N = N(\varepsilon)$ derart, dass $|a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n > N(\varepsilon)$.

iii) Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz:

$$\text{(a)}\quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(k\pi)}{1+\sqrt{k}}\,, \qquad \text{(b)}\quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k+2^k}\,.$$

iv) Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergiert die Potenzreihe

$$\text{(a)}\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n+1} 2^{-n} (x+3)^n\,, \qquad \text{(b)}\quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{n!}\ ?$$

Aufgabe 3. (Vektorrechnung; **1 + 2.5 + 3.5 + 2 + 1 Punkte**)

Im $\mathbb{R}^4$ seien

$$\underline{\mathbf{v}}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1\\1\\1\\1 \end{pmatrix},\quad \underline{\mathbf{v}}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1\\1\\1\\0 \end{pmatrix},\quad \underline{\mathbf{v}}^{(3)} = \begin{pmatrix} 0\\1\\1\\0 \end{pmatrix},\quad \underline{\mathbf{v}}^{(4)} = \begin{pmatrix} 1\\1\\1\\2 \end{pmatrix}$$

sowie

$$U := \mathrm{Spann}(\underline{\mathbf{v}}^{(1)}, \underline{\mathbf{v}}^{(2)})\,,\quad V := \mathrm{Spann}(\underline{\mathbf{v}}^{(3)}, \underline{\mathbf{v}}^{(4)})\,,\quad W := \mathrm{Spann}(\underline{\mathbf{v}}^{(1)}, \underline{\mathbf{v}}^{(2)}, \underline{\mathbf{v}}^{(3)}, \underline{\mathbf{v}}^{(4)})\,.$$

i) Es bezeichne $\underline{\mathbf{e}}^{(1)}$ den ersten kanonischen Basisvektor des $\mathbb{R}^4$. Gilt $\underline{\mathbf{e}}^{(1)} \in V$?

ii) Bestimmen Sie $\dim W$.

iii) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis von W.

iv) Bestimmen Sie $U \cap V$.

v) Ist $W - U$ ein Untervektorraum des $\mathbb{R}^4$?

Aufgabe 4. (Gemischte Aufgaben: Ungleichungen und Beträge, Polynominterpolation, Analytische Geometrie, Topologie des $\mathbb{R}^n$; **2 + 2 + 3 + 3 Punkte**)

i) Geben Sie die folgende Menge reeller Zahlen in Form eines Intervalls oder einer Vereinigung solcher an:

$$\{x \in \mathbb{R} : \ |x-4| + \big|2 - |x-2|\big| < 1\} \ .$$

ii) Gegeben sei die Wertetabelle

j	0	1	2
x_j	1	3	4
y_j	-2	2	7

und es sei $p_2(x)$ das Interpolationspolynom zu den Stützstellen x_j mit den Werten y_j, $0 \le j \le 2$.

Berechnen Sie $p_2(x)$ und $p_2(2)$ mittels der Newtonschen Darstellung (dividierte Differenzen).

iii) Im $\mathbb{R}^3$ seien die Gerade

$$G = \{\underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^3 : \quad x_2 = 1 + x_1 \ , \quad x_3 = 1 - x_1\}$$

und der Punkt

$$\underline{\mathbf{a}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

gegeben. Bestimmen Sie die Hessesche Normalform der Ebene E im $\mathbb{R}^3$, die $\underline{\mathbf{a}}$ und G enthält. Machen Sie eine Probe.

iv) Betrachten Sie die Teilmengen des $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} A &:= \{\underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^2 : \ 1 \le (x_1^2/4) + x_2^2 \le 2\} \ , \\ B &:= \{\underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^2 : \ x_2 > x_1\} \ . \end{aligned}$$

Kreuzen Sie in der folgenden Tabelle die richtigen Möglichleiten an (Bemerkung: "nichts" bedeutet, dass die Menge weder beschränkt noch offen noch abgeschlossen noch kompakt ist; es können durchaus verschiedene Eigenschaften gleichzeitig zutreffen):

	beschränkt	offen	abgeschlossen	kompakt	"nichts"
A					
B					
$A \cap B$					
$A \cup B$					
$A - B$					
∂A					