Fachrichtung Mathematik
Fakultät für Mathematik und Informatik
Universität des Saarlandes
Prof. Dr. Michael Bildhauer
M.Sc. Nils Gutheil

Saarbrücken, 09.01.2020

Übungsblatt 10 zur Vorlesung
Höhere Mathematik für (Naturwiss. und) Ingenieure I
Wintersemester 2019/2020

Aufgabe 1. (*Vektorraum, 2 + (je 1/2) Punkte*)

i) Welche Forderungen aus Definition 10.1 müssen verifiziert werden, um zu zeigen, dass eine Teilmenge U eines Vektorraums V selbst ein Vektorraum (ein sogenannter *Unterraum* von V) ist?

ii) Prüfen Sie, ob es sich um Vektorräume handelt:

$$U_1 := \left\{\underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^3 :\ x_1 \geq 0\right\}, \qquad U_2 := \left\{\underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^3 :\ x_1^2 + x_2^2 < x_3^2\right\},$$
$$U_3 := \left\{\underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^3 :\ x_1 + x_2 + x_3 = 0\right\}, \qquad U_4 := \left\{\underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^3 :\ x_1 - x_2 = 1\right\}\ ?$$

Aufgabe 2. (*Lineare Unabhängigkeit, Basis, Koordinaten, (2+1)+2+3 Punkte*)

i) Es seien

$$\underline{\mathbf{v}}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \underline{\mathbf{v}}^{(2)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \underline{\mathbf{v}}^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Sind $\underline{\mathbf{v}}^{(1)}$ und $\underline{\mathbf{v}}^{(2)}$ linear unabhängig? Kann der Vektor $\underline{\mathbf{e}}^{(3)}$ der kanonischen Basis des $\mathbb{R}^3$ als Linearkombination von $\underline{\mathbf{v}}^{(1)}$ und $\underline{\mathbf{v}}^{(2)}$ geschrieben werden?

(b) Sind $\underline{\mathbf{v}}^{(1)}$, $\underline{\mathbf{v}}^{(2)}$ und $\underline{\mathbf{v}}^{(3)}$ linear unabhängig?

ii) Betrachten Sie die Vektoren

$$\underline{\mathbf{v}}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \underline{\mathbf{v}}^{(2)} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \underline{\mathbf{w}} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}, \quad w_1,\ w_2 \in \mathbb{R} \text{ fixiert.}$$

Zeigen Sie, dass $\underline{\mathbf{v}}^{(1)}$ und $\underline{\mathbf{v}}^{(2)}$ eine Basis des $\mathbb{R}^2$ bilden und finden Sie die eindeutig bestimmten Koeffizienten $\lambda_1,\ \lambda_2 \in \mathbb{R}$ mit $\underline{\mathbf{w}} = \lambda_1 \underline{\mathbf{v}}^{(1)} + \lambda_2 \underline{\mathbf{v}}^{(2)}$.

iii) Es sei $a \in \mathbb{R}$ mit $a \neq 0$ und $a \neq 1$ fixiert. Zeigen Sie, dass die Vektoren

$$\underline{\mathbf{v}}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \underline{\mathbf{v}}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{\mathbf{v}}^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ a \end{pmatrix}$$

Bitte wenden.

eine Basis des $\mathbb{R}^3$ bilden. Finden Sie dann zu einem beliebigen (fixierten) Vektor

$$\underline{\mathbf{w}} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$$

die eindeutig bestimmten Koeffizienten $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3 \in \mathbb{R}$ mit

$$\underline{\mathbf{w}} = \lambda_1 \underline{\mathbf{v}}^{(1)} + \lambda_2 \underline{\mathbf{v}}^{(2)} + \lambda_3 \underline{\mathbf{v}}^{(3)} \ .$$

Aufgabe 3. (*Lineare Abhängigkeit und Linearkombinationen, 1.5+(1+2.5) Punkte*)

i) Es seien $\underline{\mathbf{w}}^{(1)},\ \underline{\mathbf{w}}^{(2)} \in \mathbb{R}^n,\ \underline{\mathbf{w}}^{(1)},\ \underline{\mathbf{w}}^{(2)} \neq \underline{\mathbf{0}}$.

Zeigen Sie, dass $\underline{\mathbf{w}}^{(1)}$ und $\underline{\mathbf{w}}^{(2)}$ genau dann linear abhängig sind, wenn

$$\underline{\mathbf{w}}^{(2)} = \lambda \underline{\mathbf{w}}^{(1)} \quad \text{für ein } \ \lambda \in \mathbb{R} \ .$$

ii) Es seien $\underline{\mathbf{u}}^{(1)},\ \underline{\mathbf{u}}^{(2)},\ \dots, \underline{\mathbf{u}}^{(k)} \in \mathbb{R}^n$, $3 \leq k \leq n$, $\underline{\mathbf{u}}^{(1)},\ \underline{\mathbf{u}}^{(2)},\ \dots,\ \underline{\mathbf{u}}^{(k)} \neq \underline{\mathbf{0}}$.

(a) Sind $\underline{\mathbf{u}}^{(1)},\ \underline{\mathbf{u}}^{(2)},\ \dots,\ \underline{\mathbf{u}}^{(k)}$ linear unabhängig, falls sich $\underline{\mathbf{u}}^{(k)}$ nicht als Linearkombination von $\underline{\mathbf{u}}^{(1)},\ \underline{\mathbf{u}}^{(2)},\ \dots,\ \underline{\mathbf{u}}^{(k-1)}$ darstellen lässt?

(b) Zeigen Sie: Sind $\underline{\mathbf{u}}^{(1)},\ \underline{\mathbf{u}}^{(2)},\ \dots,\ \underline{\mathbf{u}}^{(k)}$ linear abhängig, so existieren mindestens zwei $i \in \{1, 2, \dots, k\}$, sodass sich der Vektor $\underline{\mathbf{u}}^{(i)}$ als Linearkombination der anderen Vektoren darstellen lässt.

Aufgabe 4. (*Koordinaten, 2+1 Punkte*) Es sei $\mathcal{V} = (\underline{\mathbf{v}}^{(1)}, \dots, \underline{\mathbf{v}}^{(n)})$ eine Basis des $\mathbb{R}^n$.

i) Zeigen Sie: Aus $\dim \mathbb{R}^n = n$ folgt, dass es zu jedem $\underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$ Koordinaten $\alpha_1,\ \dots,\ \alpha_n \in \mathbb{R}$ gibt mit

$$\underline{\mathbf{x}} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \underline{\mathbf{v}}^{(i)} \ .$$

Hinweis. Ansatz: $\lambda_1 \underline{\mathbf{v}}^{(1)} + \lambda_2 \underline{\mathbf{v}}^{(2)} + \dots + \lambda_n \underline{\mathbf{v}}^{(n)} + \lambda \underline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{0}}$.

ii) Zeigen Sie, dass die Koordinaten aus *i)* eindeutig bestimmt sind.

Abgabe. Bis Do., 16.01.2020, 14.00 Uhr, Briefkasten U.G., Geb. E2 5.

Bonuspunkte für die Klausur.
1 Bonuspunkt: Mehr als 12 Aufgabenpunkte; 1/2 Bonuspunkt: 8-12 Aufgabenpunkte.

Besprechung. In den Übungsgruppen vom *Mo., 20.01.2020, bis zum Fr., 24.01.2020.*

Die Übungsblätter finden Sie auch im Netz unter

https://www.math.uni-sb.de/ag/bildhauer/HMI1/hmi1.html