Fachrichtung Mathematik
Fakultät für Mathematik und Informatik
Universität des Saarlandes
Prof. Dr. Michael Bildhauer
M.Sc. Nils Gutheil

Saarbrücken, 16.01.2020

Übungsblatt 11 zur Vorlesung
Höhere Mathematik für (Naturwiss. und) Ingenieure I
Wintersemester 2019/2020

Aufgabe 1. (*Lineare Abhängigkeit, 1.5+1.5 Punkte*)

i) Zeigen Sie: Sind $\underline{\mathbf{v}}^{(1)}, \underline{\mathbf{v}}^{(2)}, \dots, \underline{\mathbf{v}}^{(k)} \in \mathbb{R}^n$, $k \in \mathbb{N}$, linear abhängig und nimmt man einen weiteren Vektor hinzu, so ist das erweiterte System linear abhängig.

ii) Zeigen Sie: Sind $\underline{\mathbf{v}}^{(1)}, \underline{\mathbf{v}}^{(2)}, \dots, \underline{\mathbf{v}}^{(k)} \in \mathbb{R}^n$, $2 \leq k \in \mathbb{N}$, linear unabhängig und nimmt man einen Vektor aus dieser Familie heraus, so sind die verbleibenden Vektoren linear unabhängig.

Aufgabe 2. (*Normen im $\mathbb{R}^n$, 3+1.5+1.5 Punkte*)

i) Zeigen Sie, dass durch

$$\|\cdot\|_1 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}\,, \quad \underline{\mathbf{x}} \mapsto \sum_{j=1}^{n} |x_j|$$

und durch

$$\|\cdot\|_\infty : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}\,, \quad \underline{\mathbf{x}} \mapsto \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\}$$

jeweils eine Norm auf dem Vektorraum $\mathbb{R}^n$ definiert ist.

ii) Finden Sie Konstanten c_1, $c_2 \in \mathbb{R}$ mit

$$c_1 \|\underline{\mathbf{x}}\|_\infty \leq \|\underline{\mathbf{x}}\|_2 \leq c_2 \|\underline{\mathbf{x}}\|_\infty \quad \text{für alle } \underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n\,.$$

iii) Skizzieren Sie für die Normen $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ und $\|\cdot\|_\infty$ auf $\mathbb{R}^2$ jeweils die Menge aller Punkte mit der Norm 1.

Bitte wenden.

Aufgabe 3. (*Dimension, ONB, Unterraum, 1+1+2+2+1 Punkte*) Im $\mathbb{R}^4$ seien

$$\underline{\mathbf{v}}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \ , \quad \underline{\mathbf{v}}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \ , \quad \underline{\mathbf{v}}^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \ , \quad \underline{\mathbf{v}}^{(4)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

sowie

$$\begin{aligned} U &:= \mathrm{Spann}\big(\underline{\mathbf{v}}^{(1)}, \underline{\mathbf{v}}^{(2)}\big) \ , \qquad V := \mathrm{Spann}\big(\underline{\mathbf{v}}^{(3)}, \underline{\mathbf{v}}^{(4)}\big) \ , \\ W &:= \mathrm{Spann}\big(\underline{\mathbf{v}}^{(1)}, \underline{\mathbf{v}}^{(2)}, \underline{\mathbf{v}}^{(3)}, \underline{\mathbf{v}}^{(4)}\big) \ . \end{aligned}$$

i) Es bezeichne $\underline{\mathbf{e}}^{(1)}$ den ersten kanonischen Basisvektor des $\mathbb{R}^4$. Gilt $\underline{\mathbf{e}}^{(1)} \in V$?

ii) Bestimmen Sie $\dim W$.

iii) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis von W.

iv) Bestimmen Sie $U \cap V$.

v) Ist $W - U$ ein Untervektorraum des $\mathbb{R}^4$?

Aufgabe 4. (*ONB, 2.5+1.5 Punkte*)

i) Betrachten Sie den Unterraum

$$V = \{\underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^4 : \ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$$

des $\mathbb{R}^4$. Bestimmen Sie die Dimension von V und geben Sie eine Orthonormalbasis von V an.

ii) Ergänzen Sie die Orthonormalbasis von V aus *i*) zu einer Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^4$ und stellen Sie den kanonischen Einheitsvektor $\underline{\mathbf{e}}^{(1)}$ als Linearkombination dieser Basisvektoren dar.

Abgabe. Bis Do., 23.01.2020, 14.00 Uhr, Briefkasten U.G., Geb. E2 5.

Bonuspunkte für die Klausur.
1 Bonuspunkt: Mehr als 13 Aufgabenpunkte; 1/2 Bonuspunkt: 9-13 Aufgabenpunkte.

Besprechung. In den Übungsgruppen vom *Mo., 27.01.2020, bis zum Fr., 31.01.2020.*

Die Übungsblätter finden Sie auch im Netz unter

https://www.math.uni-sb.de/ag/bildhauer/HMI1/hmi1.html