Fachrichtung Mathematik
Fakultät für Mathematik und Informatik
Universität des Saarlandes
Prof. Dr. Michael Bildhauer
M.Sc. Nils Gutheil

Saarbrücken, 23.01.2020

Übungsblatt 12 zur Vorlesung
Höhere Mathematik für (Naturwiss. und) Ingenieure I
Wintersemester 2019/2020

Denken Sie bitte an die rechtzeitige Anmeldung in HISPOS.

Aufgabe 1. (*Orthogonales Komplement, 1+2+1+1 Punkte*) Es sei

$$M = \left\{ \underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^3 : \; \underline{\mathbf{x}} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \; 1 \leq \lambda \leq 2 \right\} .$$

i) Ist M ein Unterraum des $\mathbb{R}^3$?

ii) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis von $M^\perp$.

iii) Bestimmen Sie $(M^\perp)^\perp$.

iv) Bestimmen Sie $\big((M^\perp)^\perp\big)^\perp$.

Aufgabe 2. (*Vektorprodukt im* $\mathbb{R}^3$, *2.5 Punkte*) Es seien $\underline{\mathbf{x}}$, $\underline{\mathbf{y}}$, $\underline{\mathbf{z}} \in \mathbb{R}^3$. Zeigen Sie (durch elementare Rechnung) den Entwicklungssatz

$$\underline{\mathbf{x}} \times (\underline{\mathbf{y}} \times \underline{\mathbf{z}}) = \langle \underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{z}} \rangle \underline{\mathbf{y}} - \langle \underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{y}} \rangle \underline{\mathbf{z}} \, .$$

Aufgabe 3. (*Hessesche Normalform, je 2.5 Punkte*)

i) Im $\mathbb{R}^3$ seien die Punkte gegeben:

$$\underline{\mathbf{a}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \underline{\mathbf{c}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie die Hessesche Normalform der durch $\underline{\mathbf{a}}$, $\underline{\mathbf{b}}$, $\underline{\mathbf{c}}$ verlaufenden Ebene.

ii) Im $\mathbb{R}^3$ seien die Vektoren

$$\underline{\mathbf{v}}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \underline{\mathbf{v}}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Bitte wenden.

gegeben. Weiter sei E die Ebene, die von $\underline{\mathbf{v}}^{(1)}$, $\underline{\mathbf{v}}^{(2)}$ aufgespannt wird und den Punkt $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ enthält.

Geben Sie eine Parameterdarstellung und die Hessesche Normalform von E an.

iii) Im $\mathbb{R}^3$ seien die Gerade

$$G = \{\underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^3 : \quad x_2 = 1 + x_1 \ , \quad x_3 = 1 - x_1\}$$

und der Punkt

$$\underline{\mathbf{a}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

gegeben. Bestimmen Sie die Hessesche Normalform der Ebene E im $\mathbb{R}^3$, die $\underline{\mathbf{a}}$ und G enthält. Machen Sie eine Probe.

Aufgabe 4. (*Topologische Begriffe, 5 Punkte*) Betrachten Sie die Teilmengen des $\mathbb{R}^2$:

$$A := \{\underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^2 : \ 1 \le (x_1^2/4) + x_2^2 \le 2\} \ , \qquad B := \{\underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^2 : \ x_2 > x_1\} \, .$$

Kreuzen Sie in der folgenden Tabelle die richtigen Möglichleiten an. Begründen Sie Ihre Antworten und fertigen Sie eine Skizze an.

	beschränkt	offen	abgeschlossen	kompakt	„nichts“
A					
B					
$A \cap B$					
$A \cup B$					
$B - A$					
∂A					

Bemerkung. Der Eintrag „nichts“ bedeutet, dass die Menge weder beschränkt noch offen noch abgeschlossen noch kompakt ist; es können durchaus verschiedene Eigenschaften gleichzeitig zutreffen.

Abgabe. Bis Do., 30.01.2020, 14.00 Uhr, Briefkasten U.G., Geb. E2 5.

Bonuspunkte für die Klausur.
1 Bonuspunkt: Mehr als 13 Aufgabenpunkte; 1/2 Bonuspunkt: 9-13 Aufgabenpunkte.

Besprechung. In den Übungsgruppen vom *Mo., 03.02.2020, bis zum Fr., 07.02.2020.*

Die Übungsblätter finden Sie auch im Netz unter

https://www.math.uni-sb.de/ag/bildhauer/HMI1/hmi1.html