Fachrichtung Mathematik
Fakultät für Mathematik und Informatik
Universität des Saarlandes
Prof. Dr. Michael Bildhauer
M.Sc. Nils Gutheil

Saarbrücken, 31.10.2019

Übungsblatt 2 zur Vorlesung
Höhere Mathematik für (Naturwiss. und) Ingenieure I
Wintersemester 2019/2020

Aufgabe 1. (*Mengenalgebra, 5 Punkte*) Es sei $n \in \mathbb{N}$, $1 \leq n \leq 30$ eine feste Zahl.

Von 50 Kugeln in einer Urne seien 30 Kugeln rot und n Kugeln seien aus Holz gefertigt.

Was kann man über die Zahl der Kugeln aussagen, die sowohl rot sind als auch aus Holz gefertigt sind?

Veranschaulichen Sie das Ergebnis in einer Skizze mit unterschiedlichen Intervallen.

Hinweis. Betrachten Sie die Mengen

$$\begin{aligned} R &:= \{\text{„Kugel ist rot.“}\} \subset A\,, \qquad H := \{\text{„Kugel ist aus Holz.“}\} \subset A\,, \\ A &:= \{\text{„Alle Kugeln in der Urne.“}\} \end{aligned}$$

und finden Sie die maximale bzw. die minimale Anzahl von Elementen aus der Menge $R \cap H$. Verwenden Sie dabei eine Regel von de Morgan.

Aufgabe 2. (*Mengenalgebra, 5 Punkte*) Es seien A, B, C beliebige Mengen. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

i) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$,

ii) $A \cap (B \cup C) = A \cup (B \cap C)$.

Zeichnen Sie dabei zunächst geeignete Venn-Diagramme.

Aufgabe 3. (*Mengenalgebra, 5 Punkte*) Es seien A, B, C Mengen. Verdeutlichen Sie die folgende Beziehung zunächst anhand eines Venn-Diagrammes und geben Sie anschließend einen formalen Beweis:

$$(A - B) \cup (B - C) = (A \cup B) - (B \cap C)\,.$$

Bitte wenden.

Aufgabe 4, (*Eigenschaften von Funktionen, 2+3 Punkte*)

i) Es sei $f\colon \mathbb{R} \supset A \to B \subset \mathbb{R}$, $x \mapsto (x-1)^2 + 2$. Finden Sie jeweils A, B, sodass

(a) f surjektiv aber nicht injektiv ist;

(b) f injektiv aber nicht surjektiv ist;

(c) f bijektiv ist;

(d) f weder injektiv noch surjektiv ist.

ii) Es seien $g\colon X \to Y$ und $f\colon Y \to Z$ Abbildungen. Begründen oder widerlegen Sie

(a) g, f bijektiv $\Rightarrow f \circ g$ bijektiv;

(b) $f \circ g$ surjektiv $\Rightarrow f$ surjektiv;

(c) g injektiv, $f \circ g$ bijektiv $\Rightarrow f$ injektiv.

Abgabe. Bis Do., 07.11.2019, 14.00 Uhr, Briefkasten U.G., Geb. E2 5.

Bonuspunkte für die Klausur.
1 Bonuspunkt: Mehr als 13 Aufgabenpunkte; 1/2 Bonuspunkt: 7-13 Aufgabenpunkte.

Besprechung. In den Übungsgruppen vom *Mo., 11.11.2019, bis zum Fr., 15.11.2019.*

Die Übungsblätter finden Sie auch im Netz unter
https://www.math.uni-sb.de/ag/bildhauer/HMI1_WS1920/hmi1.html

---

Aufgabe ohne Punkte, ohne Abgabe. Wo steckt der Fehler?

Behauptung. In einem beliebigen n-Tupel sind alle Eintragungen gleich!

Beweis. Vollständige Induktion.

Induktionsanfang ($n = 1$): In einem 1-Tupel sind sicherlich alle Eintragungen gleich.

Induktionsschluss: Es sei $(a_1, a_2, \dots, a_{n+1})$ ein Tupel mit $(n+1)$ Eintragungen. Dann betrachte man die beiden n-Tupel

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) \quad \text{und} \quad (a_2, a_3, \dots, a_{n+1})\ .$$

Nach Induktionsannahme gilt

$$a_1 = a_2 = \dots = a_n \quad \text{und} \quad a_2 = a_3 = \dots = a_{n+1}\ .$$

Damit folgt die Behauptung wegen

$$a_1 = a_2 = \dots = a_n = a_{n+1}\ . \qquad \square$$

Bemerkung. Demnach sind insbesondere alle natürlichen Zahlen gleich.
