Fachrichtung Mathematik
Fakultät für Mathematik und Informatik
Universität des Saarlandes
Prof. Dr. Michael Bildhauer
M.Sc. Nils Gutheil

Saarbrücken, 07.11.2019

Übungsblatt 3 zur Vorlesung
Höhere Mathematik für (Naturwiss. und) Ingenieure I
Wintersemester 2019/2020

Aufgabe 1. (*Eigenschaften von Funktionen, 2.5 Punkte*) Es sei

$$\mathcal{M} := \left\{ M \subset \{1, 2, \dots, 49\} : \ M \text{ hat 6 Elemente} \right\}$$

die Menge aller 6-elementigen Teilmengen aus $\{1, 2, \dots, 49\}$. Drei aufeinander folgende Ziehungen der Lottozahlen (6 aus 49) kann man durch eine Funktion

$$h : \ \mathbb{N} \to \mathcal{M} \times \mathcal{M} \times \mathcal{M} \ , \qquad n \mapsto (M_1, M_2, M_3)$$

modellieren, wobei M_1 die n-te Ziehung, M_2 die $(n+1)$-te Ziehung und M_3 die $(n+2)$-te Ziehung sind. Weiter sei g die Projektion

$$g : \ \mathcal{M} \times \mathcal{M} \times \mathcal{M} \to \mathcal{M} \times \mathcal{M} \ , \qquad (M_1, M_2, M_3) \mapsto (M_1, M_3) \ .$$

Schließlich sei

$$f : \ \mathcal{M} \times \mathcal{M} \to \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \ , \qquad f(M_1, M_2) = \#(M_1 \cap M_2) \ ,$$

wobei $\#A$ die Mächtigkeit (d.h. die Anzahl der Elemente) einer endlichen Menge A bezeichnet.

Was beschreibt die Funktion $f \circ g \circ h$? Geben Sie deren Bild- und Urbildmenge an.

Aufgabe 2. (*Vollständige Induktion, je 2 Punkte*) Zeigen Sie mit vollständiger Induktion:

i) Die Summe der ersten n ungeraden Zahlen ist gleich n^2, d.h. für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{i=1}^{n} (2i - 1) = n^2 \ .$$

ii) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{k+1}{2^k} = 4 - \frac{n+3}{2^n} \ .$$

Bitte wenden.

iii) Für alle $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, gilt:

$$\prod_{k=2}^{n} \frac{k-1}{k+1} = \frac{2}{n^2+n} \ .$$

iv) Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $5^n - 1$ durch 4 teilbar.

v) Für alle $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, gilt $n^2 \geq 2n + 1$.

Aufgabe 3. (*Kombinatorik, 1.5+(1.5+1.5) Punkte*)

i) Beim Zahlenlotto (ohne Zusatzzahl o. ä.) sind 6 Zahlen aus „1 bis 49“ zu tippen. Wie viele unterschiedliche Tippmöglichkeiten mit 6 falschen Zahlen gibt es?

ii) Aus 7 Karten mit den Zahlen 1 bis 7 erhält von drei Spielern A, B und C jeder eine Karte.

(a) In wie vielen Möglichkeiten hat der Spieler A die Karte mit der Nummer 5 und diese ist gleichzeitig höher als die Karten der anderen Spieler.

(b) In wie vielen Möglichkeiten hat der Spieler A die Karte mit der Nummer 5 und mindestens einer der anderen Spieler hat eine höhere Karte.

Aufgabe 4. (*Fächer-Modelle, 1.5+1.5 Punkte*) Es seien k, $n \in \mathbb{N}$ gegeben.

i) Wie viele verschiede Möglichkeiten gibt es, k verschiedene Kugeln in n verschiedenen Fächern zu verteilen?

ii) Wie viele verschiedene Möglichkeiten gibt es, k gleiche Kugeln in n verschiedenen Fächern zu verteilen?

Abgabe. Bis Do., 15.11.2019, 14.00 Uhr, Briefkasten U.G., Geb. E2 5.

Bonuspunkte für die Klausur.
1 Bonuspunkt: Mehr als 14 Aufgabenpunkte; 1/2 Bonuspunkt: 9-14 Aufgabenpunkte.

Besprechung. In den Übungsgruppen vom *Mo., 18.11.2019, bis zum Fr., 22.11.2019.*

Die Übungsblätter finden Sie auch im Netz unter

https://www.math.uni-sb.de/ag/bildhauer/HMI1_WS1920/hmi1.html