

Saarbrücken, 14.11.2019

Übungsblatt 4 zur Vorlesung
Höhere Mathematik für (Naturwiss. und) Ingenieure I
Wintersemester 2019/2020

Aufgabe 1 (*Äquivalenzrelationen, Ungleichungen 2+2 Punkte*)

i) Rechnen Sie nach, dass

$$x \sim y :\Leftrightarrow x - y \text{ ist gerade}$$

auf \mathbb{Z} eine Äquivalenzrelation definiert. Bestimmen Sie die Äquivalenzklassen.

ii) Es sei $a \geq 1$. Zeigen Sie: Für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $\frac{1}{a} \leq x \leq a$ gilt

$$x + \frac{1}{x} \leq a + \frac{1}{a} .$$

Hinweis. Äquivalent formuliert:

$$x - a \leq \frac{1}{a} - \frac{1}{x} .$$

Aufgabe 2. (*Gruppen- Körperstruktur, 3 Punkte*)

Es sei M die Menge $M = \{0, 1\}$ versehen mit den Verknüpfungen „+“ und „·“, die über folgende Verknüpfungstabellen definiert seien:

$$\begin{array}{c|cc} + & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{array} \quad \text{sowie} \quad \begin{array}{c|cc} \cdot & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array} .$$

Verifizieren Sie anhand der Tabellen, dass $(M, +, \cdot)$ ein Körper ist.

Aufgabe 3. (*Gruppen- Körperstruktur, 3+3 Punkte*)

i) In der Menge \mathbb{R}^2 sei die Addition komponentenweise und die Multiplikation wie folgt erklärt:

$$(x_1, x_2) \cdot (y_1, y_2) = (x_1 y_1 - x_2 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1) .$$

Handelt es sich um einen Körper? Rechnen Sie dazu Definition 4.1 der Vorlesung nach.

Bitte wenden.

ii) In \mathbb{Q}^2 sei die Addition komponentenweise und die Multiplikation wie folgt erklärt:

$$(x_1, x_2) \cdot (y_1, y_2) = (x_1y_1 + 5x_2y_2, x_1y_2 + x_2y_1).$$

Zeigen Sie, dass \mathbb{Q}^2 ein Körper ist. Ist \mathbb{R}^2 mit diesen Verknüpfungen zum Körper?

Aufgabe 4. (*Rechnen mit Ungleichungen und Beträgen, 1+2+2+2 Punkte*)

i) (a) Rechnen Sie nach:

$$\{x \in \mathbb{R} : 5 - 3|x - 6| \leq 3x - 7\} = \mathbb{R}.$$

(b) Bestimmen Sie die Lösungsmenge der Ungleichung

$$|5 - 3|x - 6|| \leq 3x - 7.$$

ii) Bestimmen Sie die Lösungsmenge der Ungleichung

$$x - |2x + 4| > 1 - |x - 2|.$$

iii) Bestimmen Sie die Lösungsmenge der Ungleichung

$$||x^2 - 4| - 1| < 2.$$

Abgabe. Bis Do., 21.11.2019, 14.00 Uhr, Briefkasten U.G., Geb. E2 5.

Bonuspunkte für die Klausur.

1 Bonuspunkt: Mehr als 13 Aufgabenpunkte; 1/2 Bonuspunkt: 8-13 Aufgabenpunkte.

Besprechung. In den Übungsgruppen vom *Mo., 25.11.2019, bis zum Fr., 29.11.2019.*

Die Übungsblätter finden Sie auch im Netz unter

https://www.math.uni-sb.de/ag/bildhauer/HMI1_WS1920/hmi1.html