Fachrichtung Mathematik
Fakultät für Mathematik und Informatik
Universität des Saarlandes
Prof. Dr. Michael Bildhauer
M.Sc. Nils Gutheil

Saarbrücken, 21.11.2019

Übungsblatt 5 zur Vorlesung
Höhere Mathematik für (Naturwiss. und) Ingenieure I
Wintersemester 2019/2020

Aufgabe 1. (*Beschränkte Mengen/Funktionen, 0.5+1+1+1+1+0.5+0.5+1.5 Punkte*)

Sind die folgenden Mengen nach oben beschränkt, nach unten beschränkt, beschränkt? Falls ja, bestimmen Sie, falls existent, das Supremum und das Infimum sowie, ebenfalls sofern existent, das Maximum und das Minimum der Mengen. Begründen Sie Ihre Aussagen.

$$M_1 = (a,b) \cup (b,c]\ , \quad a < b < c \in \mathbb{R}\ , \qquad M_2 = \left\{ (-1)^n \frac{1}{n} + n :\ n \in \mathbb{N} \right\} ,$$

$$M_3 = \left\{ x \in \mathbb{R} - \{0\} :\ \frac{1}{x} > \frac{1}{x^2} \right\} , \qquad M_4 = \left\{ x \in \mathbb{R} - \{0\} :\ \frac{1}{x} \leq \frac{1}{x^2} \right\} ,$$

$$M_5 = \left\{ x \in \mathbb{R} :\ |x+1| > |2-x| \right\} ,$$

$$M_6 = \left\{ f(x) := \exp(x) : x \in \mathbb{R} \right\} , \qquad M_7 = \left\{ f(x) := \exp(x) : x \in [-1,1] \right\} ,$$

$$M_8 = \left\{ f(x) := \sin(1/x) :\ 0 < x < 1 \right\} .$$

Aufgabe 2. (*Trigonometrische Funktionen, je 1+2 Punkte*)

i) Folgern Sie aus den Additionstheoremen der trigonometrischen Funktionen

$$\cos(x) = -\sin(x - \pi/2) = \sin(\pi/2 - x) \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R}\ .$$

ii) Betrachten Sie die Umkehrfunktionen arcsin: $[-1,1] \to [-\pi/2, \pi/2]$ und arccos: $[-1,1] \to [0,\pi]$ der Hauptzweige des Sinus und des Kosinus. Folgern Sie aus *i)*

$$\arccos(y) = \frac{\pi}{2} - \arcsin(y) \qquad \text{für alle } y \in [-1,1]\ ,$$

Hinweis. Setzen Sie $y = f(x) = \cos(x)$ *und berechnen Sie* $f^{-1}(y)$*. Achten Sie darauf, dass Sie im Definitionsbereich der Hauptzweige argumentieren.*

Bitte wenden.

Aufgabe 3. (*Logarithmengesetze, je 1 Punkt*)

i) Es sei $a > 0$ fixiert, $a \neq 1$. Leiten Sie für $x, y > 0$, $t \in \mathbb{R}$ die Logarithmengesetze aus den korrespondierenden Eigenschaften der Exponentialfunktion ab.

(a) $\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$;

(b) $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$;

(c) $\log_a x^t = t \log_a(x)$.

ii) Zeigen Sie ($a, b, x > 0$, $a, b \neq 1$):

$$\log_b(x) = \frac{\log_a(x)}{\log_a(b)} \ .$$

Hinweis zur Erinnerung: Die Exponentialfunktion erfüllt die Funktionalgleichung

$$\exp(x + y) = \exp(x) \cdot \exp(y)$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}$ und die allgemeine Exponentialfunktion ist per definitionem gegeben durch

$$a^x := \exp(x \cdot \ln(a)) \ .$$

Aufgabe 4. (*Hyperbelfunktionen, 1.5+1.5+1+2 Punkte*

Zeigen Sie für alle $x, y \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
\sinh(x+y) &= \sinh(x)\cosh(y) + \cosh(x)\sinh(y) \ ; \\
\cosh(x+y) &= \cosh(x)\cosh(y) + \sinh(x)\sinh(y) \ ; \\
\cosh^2(x) - \sinh^2(x) &= 1 \ ; \\
\tanh(x+y) &= \frac{\tanh(x) + \tanh(y)}{1 + \tanh(x)\tanh(y)} \ .
\end{aligned}$$

Abgabe. Bis Do., 28.11.2019, 14.00 Uhr, Briefkasten U.G., Geb. E2 5.

Bonuspunkte für die Klausur.
1 Bonuspunkt: Mehr als 13 Aufgabenpunkte; 1/2 Bonuspunkt: 9-13 Aufgabenpunkte.

Besprechung. In den Übungsgruppen vom *Mo., 02.12.2019, bis zum Fr., 06.12.2019.*

Die Übungsblätter finden Sie auch im Netz unter

https://www.math.uni-sb.de/ag/bildhauer/HMI1/hmi1.html