Fachrichtung Mathematik
Fakultät für Mathematik und Informatik
Universität des Saarlandes
Prof. Dr. Michael Bildhauer
M.Sc. Nils Gutheil

Saarbrücken, 12.12.2019

Übungsblatt 8 zur Vorlesung
Höhere Mathematik für (Naturwiss. und) Ingenieure I
Wintersemester 2019/2020

Aufgabe 1. (*Kriterium zur Konvergenz von Reihen, 3+1 Punkte*) Es seien $\{a_n\}$ und $\{b_n\}$ Folgen positiver reeller Zahlen mit

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = c > 0 \,.$$

i) Zeigen Sie, dass $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ genau dann konvergiert, wenn $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergiert.
Hinweis. Benutzen Sie die Definition einer konvergenten Folge und das Majorantenkriterium.

ii) Finden Sie ein Beispiel, dass eine analoge Aussage im Fall $c = 0$ falsch ist.

Aufgabe 2. (*Konvergenz von Reihen, je 1 Punkt*) Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz.

i) $$\sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j \left(\frac{1}{1+\frac{1}{j}}\right),$$

ii) $$\frac{3}{1} + \frac{9}{5} + \frac{27}{25} + \frac{81}{125} + \frac{243}{625} + \dots,$$

iii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\Big((-1)^n + \frac{1}{n}\Big),$

iv) $$\sum_{j=3}^{\infty} \frac{j+2}{j^2-4},$$

v) $$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2+\frac{1}{k}}\right)^k,$$

vi) $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(k\pi)}{1+\sqrt{k}},$$

vii) $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k+2^k},$$

Bitte wenden.

viii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \binom{2n}{n} 5^{-n}$,

ix) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{3n-2}}{3^{4+2n}}$.

Aufgabe 3. (*Konvergenz von Reihen, je 1.5 Punkte*)

Es sei $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \geq 0$ fixiert. Konvergieren die Reihen

$$\text{(a)} \quad \sum_{k=3}^{\infty} \frac{1+k^2}{k^2+k^{3+\alpha}}\,, \qquad \text{(b)} \quad \sum_{k=4}^{\infty} (-1)^k \frac{k^\alpha}{k+k^\alpha}\,, \qquad \text{(c)} \quad \sum_{k=5}^{\infty} \frac{k^\alpha}{2^{k+\frac{1}{k}}} \ ?$$

Aufgabe 4. (*Geometrische Reihe, 1+1.5 Punkte*)

i) Es sei $0 < q < 1$. Berechnen Sie $\sum_{\mathbf{k=1}}^{\infty} q^k$.

ii) Betrachten Sie eine Folge $\{q_n\}$ derart, dass $q_n \to 1/4$ für $n \to \infty$. Konvergiert die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{k=1}^{\infty} (q_n)^k \right]^n \ ?$$

Abgabe. Bis Do., 19.12.2019, 14.00 Uhr, Briefkasten U.G., Geb. E2 5.

Bonuspunkte für die Klausur.
1 Bonuspunkt: Mehr als 13 Aufgabenpunkte; 1/2 Bonuspunkt: 8-13 Aufgabenpunkte.

Besprechung. In den Übungsgruppen vom *Mo., 06.01.2020, bis zum Fr., 10.01.2020.*

Die Übungsblätter finden Sie auch im Netz unter

https://www.math.uni-sb.de/ag/bildhauer/HMI1/hmi1.html