Fachrichtung Mathematik
Fakultät für Mathematik und Informatik
Universität des Saarlandes
Prof. Dr. Michael Bildhauer
M.Sc. Nils Gutheil

Saarbrücken, 19.12.2019

Übungsblatt 9 zur Vorlesung
Höhere Mathematik für (Naturwiss. und) Ingenieure I
Wintersemester 2019/2020

Aufgabe 1. (*Konvergenz von Funktionenfolgen, 2+2+2 Punkte*) Für alle $n \in \mathbb{N}$ seien

i) $f_n\colon [0,1/2] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) := x^n$,

ii) $g_n\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, $g_n(x) := \dfrac{x + \frac{x}{n}}{1 + \frac{x^2}{n^2}}$,

iii) $h_n\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$, $h_n(x) := \dfrac{x + \frac{x}{n}}{1 + \frac{x^2}{n^2}}$.

Sind die Folgen punktweise konvergent? Wenn ja, wie lautet der Grenzwert? Sind die Folgen gleichmäßig konvergent?

Hinweis zu iii). Berechnen Sie $h_n(n)$.

Aufgabe 2. (*Potenzreihen, je 1.5 Punkte*)

i) Untersuchen Sie, für welche $x \in \mathbb{R}$ die folgenden Potenzreihen konvergieren.

$$\text{(a)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + \sqrt{n}}(x-1)^n\,, \qquad \text{(b)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}(x+1)^n\,,$$

$$\text{(c)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{1+\frac{1}{n}}(x-1)^n\,, \qquad \text{(d)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} 2^n(x-3)^n\,.$$

ii) Untersuchen Sie, für welche $x \in \mathbb{R}$ die folgenden Reihen konvergieren.

$$\text{(e)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}(x-3)^{3n}\,, \qquad \text{(f)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^{n/2}} \binom{2n}{n} x^{2n}\,.$$

Aufgabe 3. (*Wachstum der Exponentialfunktion, (1+1+1)+1+1 Punkte*) Für eine reelle Zahlenfolge $\{x_n\}$ setzt man (anlog der Fall „$-\infty$“):

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty \quad :\Leftrightarrow \quad \text{Zu jedem } M > 0 \text{ existiert ein } N \in \mathbb{N}, \text{ sodass}$$
$$M < x_n \text{ für alle } n > N.$$

i) Es sei $k \in \mathbb{N}_0$ fixiert. Zeigen Sie für eine reelle Zahlenfolge $\{x_n\}$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$ (o.E. $x_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$):

(a) $\exp(x_n) > \dfrac{x_n^{k+1}}{(k+1)!}$ $\Big($zur Erinnerung: $\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\Big)$;

(b) $\lim_{n\to\infty} x_n^{-k} \exp(x_n) = \infty$;

(c) $\lim_{n\to\infty} x_n^{k} \exp(-x_n) = 0$.

ii) Zeigen Sie: Für alle $\alpha > 0$ gilt $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n)}{n^\alpha} = 0$.

iii) Existiert der Grenzwert $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n}{2^n}$?

Abgabe. Bis Do., 09.01.2020, 14.00 Uhr, Briefkasten U.G., Geb. E2 5.

Bonuspunkte für die Klausur.
1 Bonuspunkt: Mehr als 13 Aufgabenpunkte; 1/2 Bonuspunkt: 9-13 Aufgabenpunkte.

Besprechung. In den Übungsgruppen vom *Mo., 13.01.2020, bis zum Fr., 17.01.2020.*

Die Übungsblätter finden Sie auch im Netz unter

https://www.math.uni-sb.de/ag/bildhauer/HMI1/hmi1.html

Wir wünschen Ihnen

*** Frohe Weihnachten und ein gutes neues Jahr ***