Kapitel 1

Komplexe Zahlen

1.1 Einführung der komplexen Zahlen (der Körper der komplexen Zahlen; erste Eigenschaften)

In welchem Sinne ist die Gleichung $x^2 = -1$ lösbar?

Das Studium von Gleichungen 2^{ten} und 3^{ten} Grades führt im 16^{ten} Jahrhundert zur Einführung der komplexen Zahlen und geht u.a. zurück auf Cardono und Bombelli.

Euler führt schließlich 1777 das Symbol i für die imaginäre Einheit ein, d.h. es gilt (in gewissem Sinne)

$$i^2 = -1 .$$

Eine Standardanwendung in der Elektrotechnik ist beispielsweise ein komplexer Ansatz zur Beschreibung eines Wechselstromkreises (Frequenz ω) mit Spule (Induktivität L) und Ohmschen Widerstand R in Reihenschaltung, der den komplexen Wechselstromwiderstand (die Impedanz)

$$R^* = R + i\omega L$$

liefert.

Da die Gleichung $x^2 = -1$ auf der „eindimensionalen Zahlengeraden" nicht lösbar ist, liegt es nahe, als Erweiterung eine Zahlenebene zu betrachten, die die reellen Zahlen als eine Koordinatenachse enthält. Auf dieser Zahlenebene muss insbesondere eine neue Multiplikation eingeführt werden, wobei auf der reellen Achse die bekannten Rechenregeln ihre Gültigkeit behalten sollen.

Eine vorläufige Definition.

Eine Paar $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ schreibe man als

$$x + iy\ , \qquad x,\ y \in \mathbb{R}\ .$$

Hier bezeichne i eine Lösung der Gleichung

$$i^2 = -1\ .$$

Die geometrische Deutung in der so genannten Gaußschen Zahlenebene folgt in Kürze.

Es heißt x der Realteil und y der Imaginärteil der komplexen Zahl

$$z = x + iy\ , \qquad x =: \mathrm{Re}\ z\ , \qquad y =: \mathrm{Im}\ z\ .$$

Der Realteil und der Imaginärteil einer komplexen Zahl sind wie bei einem geordneten Paar unabhängig voneinander zu betrachten, d.h.

$$x + iy = u + iv \qquad \Leftrightarrow \qquad x = u \ \text{ und } \ y = v\ .$$

In der obigen Schreibweise ist

$$(x + iy) + (u + iv) = (x + u) + i(y + v)$$

und aus $i^2 = -1$ folgt formal

$$(x + iy) \cdot (u + iv) = (xu - yv) + i(xv + yu)\ .$$

Beispiel. Es ist

$$\frac{1+i}{2-i} = \frac{(1+i)(2+i)}{(2-i)(2+i)} = \frac{1}{5}(2 + 3i + i^2) = \frac{1}{5} + \frac{3}{5}i\ .$$

Im obigen Sinne ist die Menge der komplexen Zahlen definiert als

$$\mathbb{C} := \{x + iy : \ x, \ y \in \mathbb{R}\} \ .$$

Mit dem bisher skizzierten Ansatz bleibt jedoch völlig unklar, um welches Objekt es sich bei der imaginären Einheit handeln soll und was die Multiplikation dieses Objektes mit sich selbst ($i^2 = -1$) tatsächlich bedeuten soll.

Nebenbei bemerkt, kann man i auch als nicht als DIE Lösung der Gleichung $z^2 = -1$ definieren, da $(-i)$ die Gleichung ebenso löst und es könnte noch weitere Lösungen geben.

Was sind komplexe Zahlen tatsächlich?

Man betrachte die Menge $\mathbb{R}^2$ der Paare (a, b) reeller Zahlen.

Beobachtung. (In der Tat ist diese Beobachtung bereits in den Übungen zu Kapitel 3 ausgeführt.)

i) Bzgl. der Addition

$$(a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2)$$

ist der $\mathbb{R}^2$ eine kommutative Gruppe, wie es bereits im Kapitel 9.1 festgestellt ist.

ii) Eine Multiplikation ist definiert mittels

$$(a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) = (a_1 a_2 - b_1 b_2, a_1 b_2 + a_2 b_1) \ .$$

iii) Diese Multiplikation ist assoziativ und kommutativ.

iv) Es existiert ein neutrales Element, nämlich $(1, 0)$:

$$(a, b) \cdot (1, 0) = (a, b) \ .$$

$v)$ Ist $(a,b) \neq (0,0)$, so ist $\left(\frac{a}{a^2+b^2}, -\frac{b}{a^2+b^2}\right)$ das eindeutig bestimmte multiplikative inverse Element:

$$(a,b) \cdot \left(\frac{a}{a^2+b^2}, -\frac{b}{a^2+b^2}\right) = (1,0) \ .$$

Zusammen mit dem Distributivgesetz folgt

Definition 1.1. Komplexe Zahlen

Der $\mathbb{R}^2$ mit der oben definierten Addition und Multiplikation ist ein Körper. Er heißt der Körper der komplexen Zahlen und wird mit $\mathbb{C}$ bezeichnet.

Bemerkungen.

$i)$ Einerseits können die komplexen Zahlen per definitionem mit dem $\mathbb{R}^2$ identifiziert werden (vgl. Abbildung 10.1 und Abbildung 10.2).

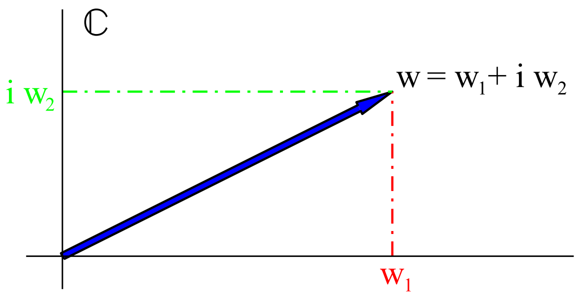

Abbildung 1.1: Die Gaußsche Zahlenebene.

Damit sind insbesondere konvergente Folgen, offene und abgeschlossene Mengen etc. definiert.

Zusätzlich ist eine Multiplikation erklärt, die $\mathbb{C}$ zu einem Körper macht.

$ii)$ Mittels der Abbildung φ: $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$,

$$\varphi(a) := (a,0)$$

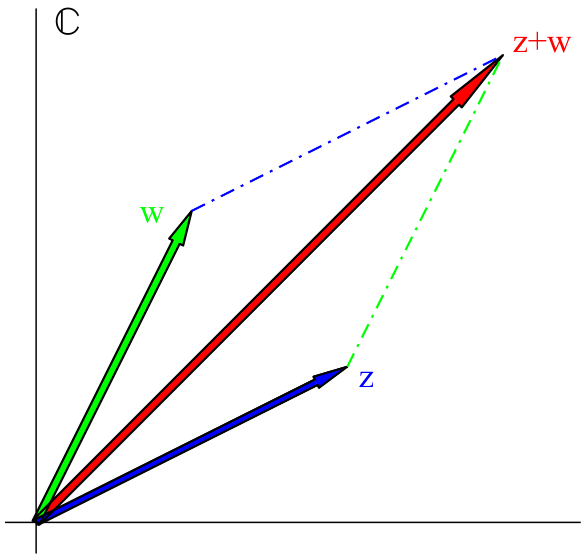

Abbildung 1.2: Kräfteparallelogramm zur Addition komplexer Zahlen.

können reelle Zahlen mit komplexen Zahlen der Form $(a, 0)$ identifiziert werden. Man schreibt statt $(a, 0)$ auch einfach a.

iii) Jede komplexe Zahl lässt sich in der Form $(a,\ b \in \mathbb{R})$

$$(a, b) = (a, 0) + \underbrace{(b, 0) \cdot (0, 1)}_{(0,b)} = a + b(0, 1)$$

darstellen. Mit der Abkürzung $(0, 1) \ =: \ i$ (imaginäre Einheit) gilt folglich

$$(a, b) = a + ib \ .$$

iv) Wegen

$$i^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) = -1$$

ist mit $\mathbb{C}$ ein Körper konstruiert, der den Körper der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ enthält und in dem die Gleichung $z^2 = -1$ lösbar ist, nämlich mit i und $-i$.

Zu beachten ist, dass $i^2 = i \cdot i$ bzgl. der komplexen Multiplikation definiert ist.

v) Formal wird mit komplexen Zahlen (unter Berücksichtigung von $i^2 = -1$) ebenso gerechnet wie mit Reellen (s.o.).

So berechnet man als weiteres Beispiel

$$\frac{1}{i} = \frac{i}{i \cdot i} = \frac{i}{-1} = -i \, .$$

Bezeichnungen und erste Eigenschaften.

i) Komplexe Zahlen werden häufig mit z oder w bezeichnet.

ii) Wie bereits erwähnt, wird z in der Regel als $z = x + iy$, x, $y \in \mathbb{R}$, dargestellt. Es heißt $x =: \mathrm{Re}\, z$ der Realteil der komplexen Zahl z, $y =: \mathrm{Im}\, z$ der Imaginärteil .

iii) Die Zahl $\bar{z} := x - iy$ heißt die zu $z = x + iy$ konjugiert komplexe Zahl (vgl. Abbildung 10.3). Es ist

$$z\bar{z} = x^2 + y^2 \in \mathbb{R} \, .$$

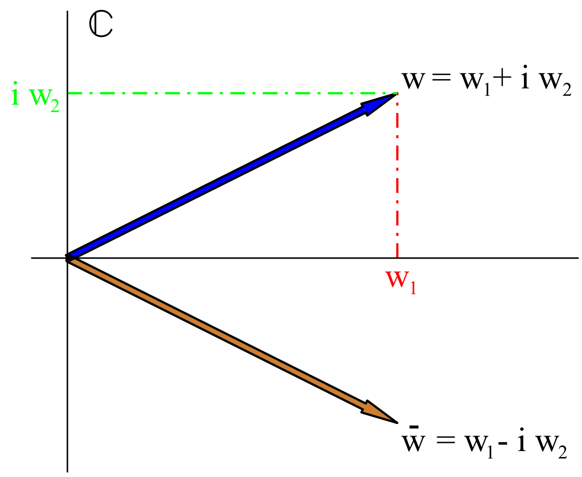

Abbildung 1.3: Zur konjugiert komplexen Zahl.

iv) In Übereinstimmung mit der Euklidischen Norm im $\mathbb{R}^2$ heißt

$$|z| := \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z\bar{z}}$$

der Betrag (oder die Norm) der komplexen Zahl $z = x + iy$.

v) Die multiplikativ inverse Zahl berechnet sich zu (s.o.)

$$\frac{1}{z} := z^{-1} = \frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}\,, \qquad z \neq 0\,.$$

vi) Die folgenden Rechenregeln sind als Übung leicht zu verifizieren:

$$\begin{aligned}
\bar{\bar{z}} &= z\,, \quad \overline{z+w} = \bar{z}+\bar{w}\,, \quad \overline{z\cdot w} = \bar{z}\cdot\bar{w}\,;\\
\operatorname{Re} z &= \frac{1}{2}(z+\bar{z})\,, \quad \operatorname{Im} z = \frac{1}{2i}(z-\bar{z})\,;\\
z \in \mathbb{R} &\Leftrightarrow z = \bar{z}\,;\\
|z| &\geq 0\,, \quad |z| = 0 \Leftrightarrow z = 0\,;\\
|z_1 z_2| &= |z_1||z_2|\,;\\
|z_1+z_2| &\leq |z_1| + |z_2| \quad (\textit{Dreiecksungleichung})\,.
\end{aligned}$$

1.2 Potenzreihen im Komplexen (Konvergenzradius; Konvergenzkreis; Exponentialfunktion; trigonometrische Funktionen; Hyperbelfunktionen)

Grob gesprochen kann bis auf eine Ausnahme im Körper der komplexen Zahlen genauso gerechnet werden wie im Reellen.

Die Ausnahme ist: In $\mathbb{C}$ gibt es keine Ordnungsrelation „$<$" im Sinne der Axiomatik aus Kapitel 4.1.

Allerdings ist der Betrag einer komplexen Zahl reell und die Beträge von komplexen Zahlen können mit „$<$" verglichen werden. Mit anderen Worten: $|z| < |w|$ ist auch im Komplexen definiert, wohingegen $z < w$ im Komplexen nicht erklärt ist.

Ersetzt man beispielsweise in Kapitel 7 die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ durch die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$, und tauscht man dabei die Betragsfunktion im Reellen gegen die komplexe Betragsfunktion, so bleiben alle Definitionen und Sätze gleich, sofern nicht komplexe Zahlen durch „$<$" miteinander verglichen werden (vgl. Übungskapitel 10.5) mßten.

Beispiele.

i) Die Definition 7.2 kann unmittelbar auf den Fall komplexer Zahlenfolgen übertragen werden. Man erhält genau Definition 9.9 für $n = 2$.

ii) Die komplexe geometrische Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ (vgl. Satz 7.7) ist konvergent für $|z| < 1$ mit

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z} \, .$$

Für $|z| \geq 1$ divergiert die Reihe, wobei auch im Komplexen die Punkte mit $|z| = 1$ gesondert untersucht werden müssen.

iii) Das Konvergenzkriterium von Leibniz (Satz 7.10) ist nicht auf den komplexen Fall übertragbar.

Definition und Konvergenzverhalten komplexer Potenzreihen.

Ebenfalls völlig analog zur reellen Situation ist eine komplexe Potenzreihe eine Reihe der Form

$$P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \, .$$

Die $a_n \in \mathbb{C}$ sind die Koeffizienten, z_0 heißt der Entwicklungspunkt.

Das komplexe Analogon zu Satz 8.1 lautet nun:

Satz 1.1. KONVERGENZ KOMPLEXER POTENZREIHEN

Es seien ein Entwicklungspunkt $z_0 \in \mathbb{C}$ sowie Koeffizienten $a_n \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, fixiert.

Zu jeder Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ gibt es eine reelle Zahl $\rho \geq 0$ mit:

i) *Im Fall $\rho = 0$ konvergiert die Reihe nur im Punkt $z = z_0$, im (formalen) Fall $\rho = \infty$ konvergiert sie für alle $z \in \mathbb{C}$.*

ii) *Ist $0 < \rho < \infty$, so konvergiert die Potenzreihe punktweise auf*

$$B_\rho(z_0) := \{z \in \mathbb{C} : \ |z - z_0| < \rho\}$$

(absolut gleichmäßig auf jeder Kreisscheibe $B_r(z_0)$ mit $0 < r < \rho$) .

iii) *Ist* $0 < \rho < \infty$*, so divergiert die Potenzreihe für alle* z *aus der Menge*

$$\{z \in \mathbb{C} : \ |z - z_0| > \rho\} \ .$$

iv) *Die Zahl* ρ *heißt der Konvergenzradius der Potenzreihe,* $B_\rho(z_0)$ *(für* $\rho > 0$*) heißt der Konvergenzkreis.*

v) *Mit der formalen Vereinbarung* $\frac{1}{0} := \infty$, $\frac{1}{\infty} := 0$ *gilt die Formel von Cauchy-Hadamard*

$$\frac{1}{\rho} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \ .$$

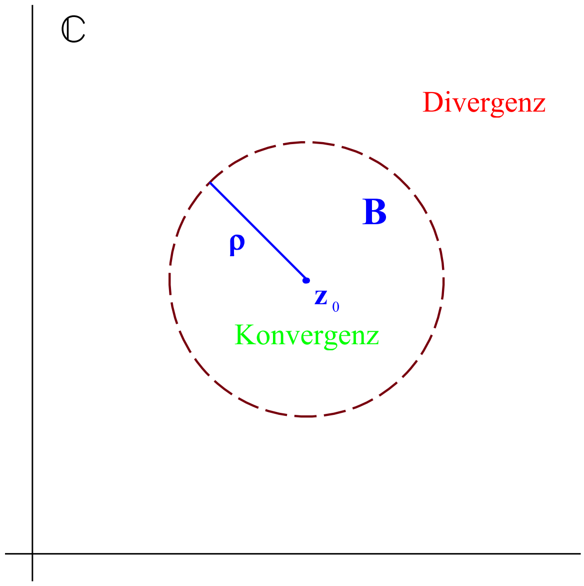

Abbildung 1.4: Zum Konvergenzverhalten einer komplexen Potenzreihe: In der offenen Kreisscheibe liegt Konvergenz vor, der (punktierte) Rand ist genau zu analysieren, außerhalb der abgeschlossenen Kreisscheibe divergiert die Reihe.

Wie ist exp im Komplexen definiert?

Die Exponentialfunktion ist im Reellen als die Potenzreihe

$$\exp(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

definiert. Dies soll nun so verallgemeinert werden, dass die Exponentialfunktion auch als Funktion exp: $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definiert ist, wobei im Spezialfall

$z \in \mathbb{R}$ beide Definitionen übereinstimmen sollen.

Da die reelle Exponentialfunktion als Potenzreihe für alle $x \in \mathbb{R}$ konvergiert, zeigt Satz 10.1 die Konvergenz der natürlichen Verallgemeinerung

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n \, , \qquad z \in \mathbb{C} \, ,$$

für alle $z \in \mathbb{C}$, d.h. es ist ein geeigneter Kandidat gefunden.

Die Frage nach anderen möglichen Kandidaten verneint der so genannte Identitätssatz für Potenzreihen.

Aus diesem folgt u.a., dass zwei Potenzreihen, die auf $\mathbb{R}$ übereinstimmen, notwendigerweise schon gleich sind. Insbesondere gibt es nur die obige Möglichkeit, die reelle Exponentialfunktion zu einer Potenzreihe exp: $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ fortzusetzen.

Gleiches gilt für die trigonometrischen Funktionen Sinus und Kosinus sowie die Hyperbelfunktionen Sinus hyperbolicus und Kosinus hyperbolicus.

Als Funktionen $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ erhält man:

$$\begin{aligned}
\exp(z) &:= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n \, , \\
\sin(z) &:= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1} \, , \\
\cos(z) &:= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n} \, , \\
\sinh(z) &:= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} z^{2n+1} \, , \\
\cosh(z) &:= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} z^{2n} \, .
\end{aligned}$$

1.3 Die Gaußsche Zahlenebene (Eulersche Formeln; Polarkoordinaten; geometrische Interpretation der komplexen Multiplikation; Einheitswurzeln)

Die komplexen Zahlen sind in Definition 10.1 als reelle Zahlenpaare versehen mit einer Körperstruktur eingeführt, wobei der Begriff Gaußsche Zahlenebene bereits gefallen ist.

Um die Geometrie der Gaußschen Zahlenebene zu verstehen, werden nun mithilfe der Exponentialfunktion Polarkoordinaten diskutiert.

Eulersche Formeln und Polarkoordinaten.

In der Reihendarstellung des Sinus bzw. des Kosinus kann $(-1)^n$ durch $(i^2)^n$ ersetzt werden, d.h.

$$\begin{aligned} i\sin(z) &= i\sum_{n=0}^{\infty}\frac{i^{2n}}{(2n+1)!}z^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)!}(iz)^{2n+1} , \\ \cos(z) &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n)!}(iz)^{2n} , \end{aligned}$$

und es gilt für alle $z \in \mathbb{C}$ (die Reihen auf der rechten Seite ergeben $\exp(iz)$)

$$\exp(iz) = \cos(z) + i\sin(z) . \tag{1}$$

Ersetzt man weiter in (1) z durch $-z$ und beachtet, dass per definitionem $\cos(-z) = \cos(z)$, $\sin(-z) = -\sin(z)$, so folgt für alle $z \in \mathbb{C}$

$$\exp(-iz) = \cos(z) - i\sin(z) .$$

Zusammen ergeben sich die Eulerschen Formeln

$$\begin{aligned} \cos(z) &= \frac{1}{2}\Big(\exp(iz) + \exp(-iz)\Big) , \\ \sin(z) &= \frac{1}{2i}\Big(\exp(iz) - \exp(-iz)\Big) \end{aligned}$$

(da die Funktionalgleichung der Exponentialfunktion auch im Komplexen gilt, ist $\sin^2(z) + \cos^2(z) = 1$ eine unmittelbare Folgerung).

Für $z = x + iy$, x, $y \in \mathbb{R}$, folgt aus (1) (setze $y = z$ in (1))

$$\exp(z) = \exp(x)\exp(iy) = \exp(x)(\cos(y) + i\sin(y)) \ . \tag{2}$$

Insbesondere gilt für alle $t \in \mathbb{R}$ (man wähle $x = 0$ und schreibe $y = t$)

$$e^{it} := \exp(it) = \cos(t) + i\sin(t) \ . \tag{3}$$

Identifiziert man komplexe Zahlen wieder mit dem $\mathbb{R}^2$, so bedeutet (3)

$$e^{it} \cong \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} ,$$

d.h. die Funktion $e^{it}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ durchläuft in Abhängigkeit von t die Einheitskreislinie im $\mathbb{R}^2$ (vgl. Abbildung 5.11).

Folgerung. Damit ist gezeigt, dass auch die Definition der trigonometrischen Funktionen als Potenzreihen mit der elementargeometrischen Definition verträglich ist.

Vorsicht.

i) Die Darstellung (2) zeigt, dass die komplexe Exponentialfunktion nicht bijektiv sein kann (warum?).

ii) Die Eulerschen Formeln zeigen weiter, dass der komplexe Sinus und der komplexe Kosinus nicht beschränkt sein können (warum?).

Aus (2) folgt, dass jede komplexe Zahl z als

$$z = re^{i\varphi} = r(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi)) \ , \qquad 0 \le r \ , \quad \varphi \in \mathbb{R} \ .$$

geschrieben werden kann.

Hierbei ist $r = |z|$ die Länge des blau dargestellten Vektors in Abbildung 10.1 und $\varphi =: \arg z$ der Winkel im Bogenmaß, der mit der reellen Achse eingeschlossen wird. φ heißt ein (man beachte die Periodizität der reellen trigonometrischen Funktionen) Argument von z.

Mit dieser Darstellung in Polarkoordinaten kann auch die Multiplikation komplexer Zahlen in der Gaußschen Zahlenebene geometrisch interpretiert werden:

Ist $w = |w|e^{i\varphi}$ und $z = |z|e^{i\psi}$, so gilt

$$wz = |w||z|e^{i(\varphi+\psi)} = |w||z|(\cos(\varphi+\psi) + i\sin(\varphi+\psi)) \ ,$$

d.h. bei der komplexen Mulitiplikation werden die Beträge multipliziert und die Argumente addiert (vgl. Abbildung 10.5: In der Abbildung wird $z_1 = \sqrt{2}/2(1+i) = \sqrt{2}/2e^{i\pi/4}$ – rot symbolisiert – mit $z_2 = \sqrt{2}(-1+i) = \sqrt{2}e^{i3\pi/4}$ – grün symbolisiert – multipliziert. Das Ergebnis ist – blau dargestellt – die Zahl $-1 = e^{i\pi}$).

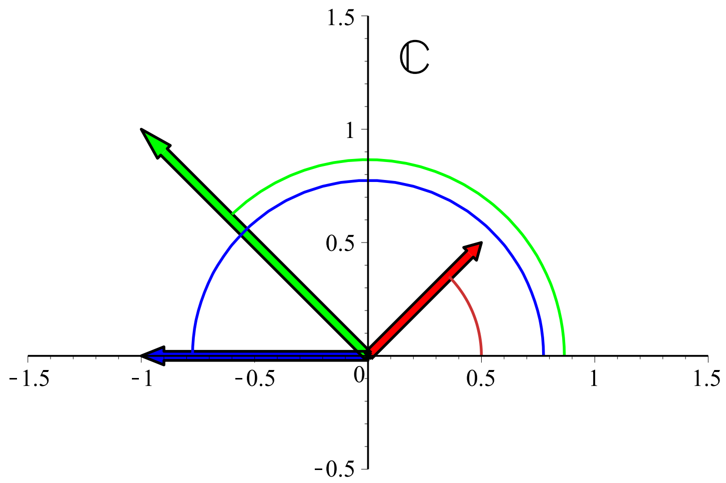

Abbildung 1.5: Zur Multiplikation in der Gaußschen Zahlenebene.

Einheitswurzeln.

Die Gleichung $z^2 = 1$ hat die zwei reellen Lösungen $z_0 = 1$ und $z_1 = -1$ und auch eine komplexe Rechnung liefert keine weiteren Lösungen.

Die Gleichung $z^3 = 1$ wiederum hat im Reellen nur die Lösung $z_0 = 1$. Hier liefern Polarkoordinaten in der Gaußschen Zahlenebene unmittelbar weitere komplexe Lösungen.

Sind nämlich

$$\begin{aligned} z_0 &= e^{i0} = 1 \, , \\ z_1 &= e^{i(0+\frac{2\pi}{3})} \, , \\ z_2 &= e^{i(0+\frac{4\pi}{3})} \, , \end{aligned}$$

so gilt (siehe Abbildung 10.6)

$$z_0^2 = z_1^2 = z_2^2 = 1 \, .$$

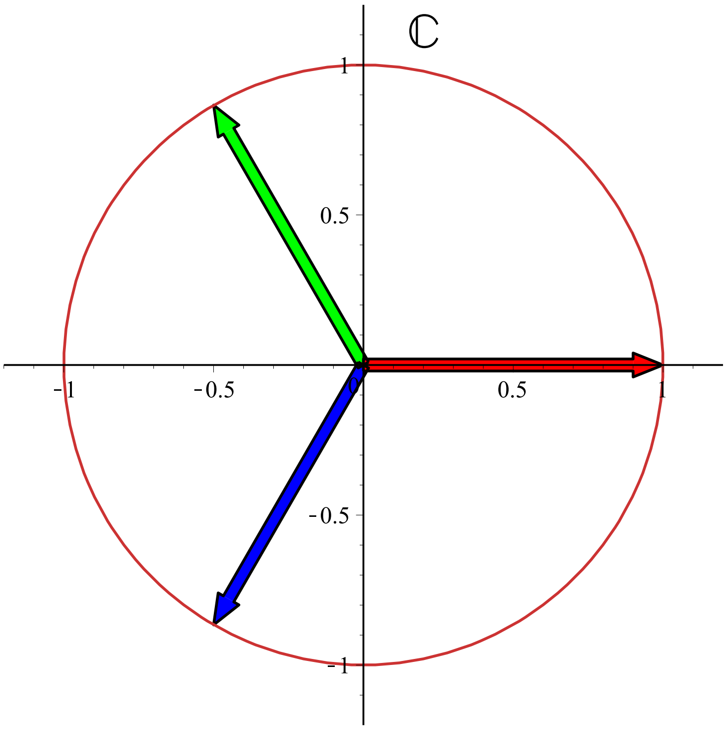

Abbildung 1.6: Die drei Lösungen der Gleichung $z^3 = 1$.

Man beachte, dass die Fortführung

$$z_3 = e^{i(0+\frac{6\pi}{3})} = e^{i(0+2\pi)} \, , \qquad z_4 = e^{i(0+\frac{8\pi}{3})} = e^{i(\frac{2\pi}{3}+2\pi)} \, , \qquad \ldots$$

aufgrund der Periodizität von e^{it} wieder auf z_0, z_1 und z_2 führt. Es gibt genau diese drei Lösungen.

Allgemein gilt: Es gibt genau n verschiedene komplexe Zahlen $z_0, \ldots, z_{n-1}$, die der Gleichung $z^n = 1$ genügen. Sie heißen Einheitswurzeln und berechnen sich zu

$$z_k = e^{i\frac{2\pi k}{n}} \,, \qquad k = 0,\ 1,\ \ldots,\ n-1 \,.$$

1.4 Der Fundamentalsatz der Algebra (Zerlegung in Linearfaktoren)

Wie oben gesehen, hat die Gleichung $z^n - 1 = 0$ genau n komplexe Lösungen. Die allgemeine Frage nach der Lösbarkeit algebraischer Gleichungen beliebigen Grades beantwortet der so genannte Fundamentalsatz der Algebra.

Satz 1.2. $\boxed{\text{Fundamentalsatz der Algebra}}$

Es sei $n \in \mathbb{N}$ und

$$p_n(z) := a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$$

ein Polynom n^{ten} Grades ($a_n \neq 0$) mit komplexen Koeffizienten $a_i \in \mathbb{C}$, $i = 1, \ldots, n$.

Dann hat das Polynom p_n mindestens eine Nullstelle $\lambda \in \mathbb{C}$, d.h. $p_n(\lambda) = 0$.

Man nennt den Körper der komplexen Zahlen algebraisch abgeschlossen.

Mithilfe von Satz 10.2 kann ein Polynom sukzessive in Linearfaktoren zerlegt werden:

Ist nämlich λ eine Nullstelle von p_n, so ist nach einer Polynomdivision $p_n(z) = (z - \lambda) p_{n-1}(z)$, wobei p_{n-1} ein Polynom vom Grad $n - 1$ ist, welches im Fall $n \geq 2$ nach Satz 10.2 wieder eine Nullstelle hat (nicht notwendig verschieden von der ersten).

Man erhält schließlich

$$p_n(z) = a_n (z - \lambda_1)^{k_1} (z - \lambda_2)^{k_2} \ldots (z - \lambda_r)^{k_r} \,.$$

Dabei ist

$$\mathbb{N} \ni r \leq n\,, \qquad k_1 + k_2 + \cdots + k_r = n$$

und für $i = 1, \ldots, r$ sind die λ_i die Nullstellen von $p_n(z)$ mit der Vielfachheit k_i.

Werden die Nullstellen mit ihrer Vielfachheit gezählt, so hat $p_n(z)$ genau n Nullstellen (nicht notwendig verschieden) in $\mathbb{C}$.

Das folgende Korollar ist ein wichtiger Spezialfall, auf den man sich später beispielsweise bei der Diskussion gewöhnlicher Differentialgleichungen noch mehrfach beziehen wird. Der Beweis kann als Übungsaufgabe geführt werden.

Korollar 1.1. POLYNOME IN $\mathbb{C}$ MIT REELLEN KOEFFIZIENTEN

Es sei $n \in \mathbb{N}$ und

$$p_n(z) := a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$$

ein Polynom n^{ten} Grades ($a_n \neq 0$) mit reellen Koeffizienten $a_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, n$.

Ist $\lambda \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle von p_n, so ist auch die konjugiert komplexe Zahl $\bar{\lambda}$ eine Nullstelle von p_n.

1.5 Übungsaufgaben zu Kapitel 10

Aufgabe 1. Bestimmen Sie Real- und Imaginärteil der komplexen Zahlen

$$i)\ (i+4) + (7-3i), \quad ii)\ (1+i)(1-i), \quad iii)\ (\sqrt{2}-i)(1+i)^2,$$

$$iv)\ \frac{1}{i}, \quad v)\ \frac{1+i}{1-i}, \quad vi)\ \frac{(2+1)(3-2i)(1+2i)}{(1-i)^2}.$$

Aufgabe 2. Rechnen Sie die Eigenschaften $vi)$, Kapitel 10.1, zu Betrag und Konjugation nach.

Aufgabe 3. Untersuchen Sie, welche Definitionen und Sätze aus Kapitel 7 auf den komplexen Fall übertragbar sind.

Aufgabe 4. Zeigen Sie:

$$\begin{aligned} \cosh(iz) &= \cos(z) , & \cosh(z) &= \cos(iz) , \\ \sinh(iz) &= i \sin(z) , & \sinh(z) &= -i \sin(iz) . \end{aligned}$$

Aufgabe 5.

i) Bestimmen Sie den Betrag und das Argument in $[0, 2\pi)$ der komplexen Zahlen

$$1 + i , \quad (1 - i)^2 \quad \text{und} \quad e^{-i\frac{\pi}{2}} .$$

ii) Lösen Sie die Gleichung $z^2 - 8 = -4iz$ mithilfe einer quadratischen Ergänzung.

Aufgabe 6.* Bestimmen Sie alle Lösungen der Gleichung $z^4 = i$ und veranschaulichen Sie das Ergebnis in der Gaußschen Zahlenebene.

Aufgabe 7.* Zeigen Sie Korollar 10.1.

Aufgabe 8. Machen Sie sich in Ihrem Computeralgebrasystem mit komplexen Polarkoordinaten und Wurzeln vertraut.

Lösungshinweise zu den Übungsaufgaben.

Aufgabe 6. Es ist $i = e^{i\pi/2}$, folglich sind

$$z_0 = e^{i\frac{\pi}{8}}\ , \quad z_1 = e^{i(\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{2})}\ , \qquad z_2 = e^{i(\frac{\pi}{8}+\pi)}\ , \qquad z_3 = e^{i(\frac{\pi}{8}+\frac{3\pi}{2})}$$

die vier Lösungen der Gleichung (siehe Abbildung 10.7).

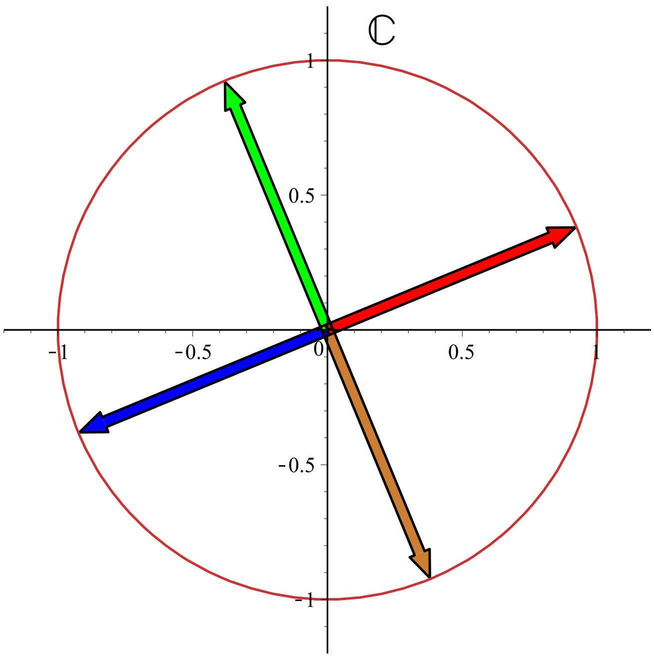

Abbildung 1.7: Die vier Lösungen der Gleichung $z^4 = i$.

Aufgabe 7. Für ein Polynom mit reellen Koeffizienten gilt: Ist

$$p_n(\lambda) = a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0 = 0$$

und gilt $a_i \in \mathbb{R}$ für $i = 1, \ldots, n$, so folgt wegen $\overline{zw} = \bar{z}\bar{w}$ und $\overline{z+w} = \bar{z}+\bar{w}$

$$0 = \overline{p_n(\lambda)} = a_n\bar{\lambda}^n + a_{n-1}\bar{\lambda}^{n-1} + \cdots + a_1\bar{\lambda} + a_0 = p_n(\bar{\lambda})\ ,$$

demnach ist mit λ auch $\bar{\lambda}$ eine Nullstelle von p_n. $\square$