Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1 Mathematik
Jun. Prof. Dr. S. Brandhorst
Msc. P. Kattler

7. April 2020

Algebraische Zahlentheorie I
Sommersemester 2020
Blatt 1

1. Sei $R$ ein kommutativer Ring mit Eins.
   (a) Zeigen Sie, dass jedes Primelement von $R$ irreduzibel ist.
   (b) Zeigen Sie, dass jedes irreduzible Element von $R$ prim ist, falls $R$ ein Hauptidealring ist.
   (c) Zeigen Sie, dass die Umkehrung nicht gilt. **(5 Bonus Punkte)**

2. (a) Sei $R$ ein euklidischer Ring mit Normfunktion $N : R \to \mathbb{N}_0$. Zeigen Sie, dass jedes Ideal $I$ von $R$ von einem Element $0 \neq x \in I$ mit minimaler Norm erzeugt wird. Insbesondere ist jeder euklidische Ring ein Hauptidealring.
   (b) Zeigen Sie, dass jeder Hauptidealring faktoriell ist.
   (c) Zeigen Sie, dass zwei Hauptideale $(a)$ und $(b)$ genau dann gleich sind, wenn $a$ und $b$ assoziiert sind. **(5 Bonus Punkte)**

3. Der Ring $\mathbb{Z}[i]$ ist ein euklidischer Ring, mit Normfunktion $N : \mathbb{Z}[i] \to \mathbb{N}_0, \alpha \mapsto |\alpha|^2$. Zeigen Sie, dass ein Element $\alpha \in \mathbb{Z}[i]$ eine Einheit ist, genau dann wenn $N(\alpha) = 1$. Folgern Sie

$$\mathbb{Z}[i]^\times = \{1, -1, i, -i\}.$$

**(5 Bonus Punkte)**

4. Es seien $x, y, z$ mit $xyz \neq 0$ und $(x, y, z) = 1$ eine ganzzahlige Lösung der Gleichung

$$x^2 + y^2 = z^2.$$

Zeigen Sie, dass $x + iy = \varepsilon\alpha^2$ mit einer Einheit $\varepsilon \in \mathbb{Z}[i]^\times$ und $\alpha = u + iv \in \mathbb{Z}[i]$. Nutzen Sie dazu die Tatsache, dass $\mathbb{Z}[i]$ faktoriell ist.

Folgern Sie, dass es ganze Zahlen $u, v$ mit $uv \neq 0$ und $(u, v) = 1$ gibt, sodass

$$x = u^2 - v^2, \qquad y = 2uv, \qquad z = u^2 + v^2,$$

bis auf Vertauschen von $x$ und $y$. **(5 Bonus Punkte)**

Abgabe bis spätestens **Dienstag** den 14.04.2020 um **10:00 Uhr** per Mail an **kattler@math.uni-sb.de**