Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1 Mathematik
Jun. Prof. Dr. S. Brandhorst
Msc. P. Kattler

17. Juni 2020

Algebraische Zahlentheorie I
Sommersemester 2020
Blatt 10

1. (a) Zeigen Sie, dass eine Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ genau dann in $\mathbb{Q}_p$ konvergiert, wenn $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge in $\mathbb{Q}_p$ ist.
   (b) Zeigen Sie, dass die Folge $(\frac{1}{10^n})_{n\in\mathbb{N}}$ nicht in $\mathbb{Q}_p$ konvergiert, für jede Primzahl p.
   (c) Zeigen Sie, dass die Folge $(a^{p^n})_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{Q}_p$ konvergiert, wobei $(a,p) = (1)$.

(5 Punkte)

2. (a) (Newton Verfahren) Sei $f \in \mathbb{Z}_p[X]$ ein Polynom und sei $a_0 \in \mathbb{Z}_p$ mit $|f(a_0)|_p < |f'(a_0)|_p^2$. Zeigen Sie, dass die Folge $(a_n)_n \in \mathbb{N}_0$ mit

$$a_{n+1} = a_n - \frac{f(a_n)}{f'(a_n)}$$

   gegen eine Nullstelle a von f konvergiert, wobei

$$|a - a_0|_p \leq \left| \frac{f(a_0)}{f'(a_0)^2} \right|_p .$$

   (b) Sei nun $p > 2$ eine Primzahl und $b \in \mathbb{Z}$ mit $(b,p) = (1)$. Zeigen Sie, dass die Gleichung

$$x^2 \equiv b \bmod p$$

   genau dann eine Lösung hat, wenn die Gleichung

$$x^2 = b$$

   eine Lösung in $\mathbb{Z}_p$ hat.

(5 Punkte)

3. Zeigen Sie, dass die Körper $\mathbb{Q}_p$ und $\mathbb{Q}_q$ nicht isomorph sind, falls $p \neq q$. *Hinweis:* Betrachten Sie den Grenzwert von Aufgabe 1 (c)

(5 Punkte)

4. Sei K ein *endlicher* Körper und $K(t)$ der Funktionenkörper in einer Variablen. Wir erhalten eine Bewertung v_∞ auf $K(t)$ durch

$$\nu_\infty \left(\frac{f}{g} \right) = deg(f) - deg(g).$$

   Zeigen Sie, dass ν_∞ und die $\nu_\mathfrak{p}$, für jedes Primideal $\mathfrak{p}$ von $K[t]$, die einzigen nicht-trivialen Bewertungen auf $K(t)$ bis auf Äquivalenz sind.

(5 Punkte)

Abgabe bis spätestens **Mittwoch** den 24.06.2020 um **10:00 Uhr** per Mail an **kattler@math.uni-sb.de**