Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1 Mathematik
Jun. Prof. Dr. S. Brandhorst
Msc. P. Kattler

24. Juni 2020

Algebraische Zahlentheorie I
Sommersemester 2020
Blatt 11

1. Zeigen Sie mit dem Lemma von Hensel, dass die Gleichung

$$x^3 = 3$$

eine Lösung in $\mathbb{Z}_5$ hat. **(5 Punkte)**

2. Zeigen Sie, dass durch $\Psi : \mathbb{Z}_p^* \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}_p : (a, n) \mapsto ap^n$ ein Gruppenhomomorphismus gegeben ist. **(5 Punkte)**

3. (a) Zeigen Sie, dass der Quotient

$$\mathbb{Q}_2^* / \mathbb{Q}_2^{*2} \tag{1}$$

aus 8 Elementen besteht und folgern Sie, dass es (bis auf Isomorphie) 7 quadratische Erweiterungen von $\mathbb{Q}_2$ gibt. *Hinweis:* Zeigen Sie mit dem Newton Verfahren (Blatt 10), dass die Gleichung $x^2 = a$ in $\mathbb{Z}_2$ lösbar ist, genau dann wenn die Gleichung $x^2 \equiv a \bmod 8$ lösbar ist.

(b) Sei jetzt $p > 2$ eine Primzahl. Zeigen Sie, dass der Quotient

$$\mathbb{Q}_p^* / \mathbb{Q}_p^{*2} \tag{2}$$

aus 4 Elementen besteht und folgern Sie, dass es (bis auf Isomorphie) 3 quadratische Erweiterungen von $\mathbb{Q}_2$ gibt. Haben auch $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ nur endlich viele quadratische Erweiterungen?

(5 Punkte)

4. Sei $p > 2$ eine Primzahl. Finden Sie ein $a \in \mathbb{Z}_p$, sodass die Gleichung

$$x^2 \equiv a \bmod p$$

eine Lösung hat, aber die Gleichung

$$x^2 = a$$

keine Lösung $x \in \mathbb{Z}_p$ hat. **(5 Punkte)**

5. Sei K ein Körper mit nicht archimedischer Norm. Zeigen Sie, dass K total unzusammenhängend ist. Dabei heißt ein topologischer Raum total unzusammenhängend, wenn die leere Menge und die einelementigen Mengen die einzigen zusammenhängenden Teilmengen sind. Ein topologischer Raum heißt zusammenhängend, wenn er keine disjunkte Vereinigung offener Mengen ist. **(5 Bonus Punkte)**

Abgabe bis spätestens **Mittwoch** den 01.07.2020 um **10:00 Uhr** per Mail an **kattler@math.uni-sb.de**