Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1 Mathematik
Jun. Prof. Dr. S. Brandhorst
Msc. P. Kattler

01. Juli 2020

Algebraische Zahlentheorie I
Sommersemester 2020
Blatt 12

1. Sei p eine Primzahl. Dann ist p kein Quadrat in $\mathbb{Q}_p$. Sei w die eindeutige Fortsetzung der diskreten Exponentialbewertung ν_p von $\mathbb{Q}_p$ auf $\mathbb{Q}(\sqrt{p})$. Zeigen Sie, dass $w(\sqrt{p}) = \frac{1}{2}$. **(5 Punkte)**

2. Betrachten Sie einen p-adischen Zahlkörper $K|\mathbb{Q}_p$. Seien $1+x \in U^{(1)}$, $z \in \mathbb{Z}_p$ und $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{N}$ mit $\lim_{n\to\infty} z_n = z$. Dann ist
$$(1+x)^z := \lim_{n\to\infty} (1+x)^{z_n}$$
wohldefiniert (Das müssen Sie nicht zeigen). Zeigen Sie, dass
$$(1+x)^z = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{z}{k} x^k,$$
falls zusätzlich $x \in K$ mit $\nu_p(x) > \frac{e}{p-1}$ gilt. Dabei ist
$$\binom{z}{k} = \frac{z(z-1)\dots(z-(k-1))}{k!}.$$
(5 Punkte)

3. Seien K ein p-adischer Zahlkörper, $x \in K$ mit $\nu_p(x) > \frac{e}{p-1}$ und $z \in Z_p$. Zeigen Sie
$$\log\left((1+x)^z\right) = z\log(1+x) \text{ und } (1+x)^z = \exp(z\log(1+x)).$$
(5 Punkte)

4. Seien p eine Primzahl und $k \in \mathbb{N}$.
   (a) Sei $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge die gegen $z \in \mathbb{Z}_p$ konvergiert. Zeigen Sie, dass $\binom{z_n}{k}$ gegen $\binom{z}{k}$ konvergiert.
   (b) Sei $z \in \mathbb{Z}_p \setminus \{0\}$. Zeigen Sie, dass
   $$\nu_p\left(\binom{z}{p^{\nu_p(z)}}\right) = 0.$$
   (c) Seien $a, b \in \mathbb{N}, a > b$. Zeigen Sie, dass
   $$\nu_p\left(\binom{p^a}{p^b}\right) = a - b.$$
   (d) Geben Sie eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}\subseteq\mathbb{Z}_p}$ an, sodass $\nu_p(a_n)$ beschränkt, aber $\nu_p\left(\binom{a_n}{k}\right)$ unbeschränkt ist.

(5 Punkte)

Abgabe bis spätestens **Mittwoch** den 08.07.2020 um **10:00 Uhr** per Mail an **kattler@math.uni-sb.de**