Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1 Mathematik
Jun. Prof. Dr. S. Brandhorst
Msc. P. Kattler

08. Juli 2020

Algebraische Zahlentheorie I
Sommersemester 2020
Blatt 13

1. Sei ν_p die eindeutige Fortsetzung der p-adischen Bewertung auf den algebraischen Abschluss $\overline{\mathbb{Q}_p}$. Zeigen Sie, dass die Logarithmusfunktion sich zu einem stetigem Homomorphismus $\log : \overline{\mathbb{Q}_p}^* \to \overline{\mathbb{Q}_p}$ fortsetzt und die Exponentialfunktion sich zu einem stetigen Homomorphismus $\exp : \overline{\mathfrak{p}}^{\frac{1}{1-p}} \to \overline{\mathbb{Q}_p}^*$ fortsetzt, wobei $\overline{\mathfrak{p}}^{\frac{1}{p-1}} = \{x \in \overline{\mathbb{Q}_p} | \nu_p(x) > \frac{1}{p-1}\}$.
Hinweis: Ist $K|\mathbb{Q}_p$ ein p-adischer Zahlkörper mit Bewertungsring $\mathcal{O}_K$ und maximalem Ideal $\mathfrak{p}_K$ und $p\mathcal{O} = \mathfrak{p}_K^e$. Dann gilt für die Bewertung $\nu_{\mathfrak{p}_K} = e\nu_p$. Sie können verwenden, dass ein Homomorphismus topologischer Gruppen genau dann stetig ist, wenn er stetig in dem neutralen Element ist. **(5 Punkte)**

2. Sei K ein $\mathfrak{p}$-adischer Zahlkörper. Zeigen Sie, dass jede Untergruppe von K^* mit endlichem Index abgeschloffen (offen und abgeschlossen) in K^* ist. *Hinweis:* Wann ist eine Menge im topologischen Produkt diskreter Mengen offen bzw. abgeschlossen. **(5 Punkte)**

3. Sei K ein $\mathfrak{p}$-adischer Zahlkörper und $\mathcal{O}$ sein Bewertungsring. Zeigen Sie, dass die Familie von Mengen $(\mathcal{O}^{*n})_{n\in\mathbb{N}}$ eine Umgebungsbasis des Einselementes von $\mathcal{O}^*$ ist. **(5 Punkte)**

4. Bestimmen Sie das Newton Polygon von
$$f(x) = x^4 - x^3 + px + p \in \mathbb{Q}_p.$$
Bestimmen Sie die Bewertungen der Nullstellen von f in einem Zerfällungskörper K von f. Dabei sei die p-adische Bewertung ν_p eindeutig auf K fortgesetzt. **(5 Punkte)**

Abgabe bis spätestens **Mittwoch** den 15.07.2020 um **10:00 Uhr** per Mail an **kattler@math.uni-sb.de**