Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1 Mathematik
Jun. Prof. Dr. S. Brandhorst
Msc. P. Kattler

14. April 2020

Algebraische Zahlentheorie I
Sommersemester 2020
Blatt 2

1. Betrachten Sie den Ring $R = \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$.

   (a) Zeigen Sie, dass
   $$21 = 3 \cdot 7 = (1 + 2\sqrt{-5})(1 - 2\sqrt{-5})$$
   zwei verschiedene Zerlegungen von 21 in irreduzible Faktoren im Ring $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ sind.

   (b) Zeigen sie, dass
   $$(21) = (3, 1 + 2\sqrt{-5})(7, 1 + 2\sqrt{-5})(3, 1 - 2\sqrt{-5})(7, 1 - 2\sqrt{-5})$$
   eine Zerlegung von (21) in Primideale ist. **(5 Bonus Punkte)**

2. Beweisen oder widerlegen Sie: Das Ideal (2) in $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$ ist ein Produkt von Primidealen.
   Hinweis: Betrachten Sie $\mathfrak{a} = (2, 1 + \sqrt{-3})$. **(5 Bonus Punkte)**

3. Sei $\omega = e^{\frac{2\pi i}{3}} = -\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\sqrt{3}$ eine primitive dritte Einheitswurzel. Zeigen Sie, dass $\mathbb{Z}[\omega]$ ein euklidischer Ring bezüglich der Normfunktion $N : \mathbb{Z}[\omega] \to \mathbb{N}_0$ ist. *Hinweis:* Sie können sich an dem Beweis, dass $\mathbb{Z}[i]$ ein euklidischer Ring ist, orientieren. Das ist Satz 1.2 im Neukirch. **(5 Bonus Punkte)**

4. Bestimmen Sie alle ganzen algebraischen Zahlen im Körper $\mathbb{Q}\left(\frac{1+\sqrt{2}}{3}\right)$. **(5 Bonus Punkte)**

Abgabe bis spätestens **Dienstag** den 21.04.2020 um **10:00 Uhr** per Mail an **kattler@math.uni-sb.de**