Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1 Mathematik
Jun. Prof. Dr. S. Brandhorst
Msc. P. Kattler

21. April 2020

Algebraische Zahlentheorie I
Sommersemester 2020
Blatt 3

1. (a) Bestimmen Sie die Kettenbruchentwicklungen zu $\sqrt{5}, \sqrt{6}$ und dem goldenen Schnitt $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.
   (b) Bestimmen Sie jeweils eine Lösung der Pellschen Gleichungen
$$x^2 - 19y^2 = 1, \qquad x^2 - 41y^2 = 1.$$

(5 Bonus Punkte)

2. (a) Bestimmen Sie den Wert der periodischen Kettenbruchentwicklung $\alpha = [\overline{1, 2, 3}]$.
   Hinweis: $\alpha = [1, 2, 3, \alpha]$.
   (b) Zeigen Sie, dass $[5; 4, \overline{1, 2, 3}]$ eine algebraische Zahl vom Grad 2 ist.

(5 Bonus Punkte)

3. Betrachten Sie das folgende Rinderproblem des Archimedes. Die Anzahl der weißen, schwarzen, gescheckten und braunen Bullen Siziliens seien gegben durch x, y, z und t. Entsprechend seien die Anzahl der schwarzen, gescheckten und braunen Kühe Siziliens durch x', y', z' und t' gegeben. Ferner seien die Verhältnise
$$x = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) y + t, \quad y = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right) z + t, \quad z = \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{7}\right) x + t$$
und
$$\begin{aligned} x' &= \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)(y + y'), \quad & z' &= \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6}\right)(t + t') \\ y' &= \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right)(z + z'), \quad & t' &= \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{7}\right)(x + x') \end{aligned}$$
erfüllt.

   Im zweiten Teil des Rindeproblems soll zusätzlich $x+y$ eine Quadratzahl und $z+t$ eine Dreieckszahl sein.

   (a) Zeigen Sie, dass jede Lösung des ersten Teils des Rinderproblems durch
$$(x, y, z, t) = 4657 \cdot k(2226, 1602, 1580, 891)$$
$$(x', y', z', t') = k(7206360, 4893246, 3515820, 5439213)$$
   für eine natürliche Zahl k gegeben ist.
   Hinweis: Nutzen Sie zum Lösen linearer Gleichungssysteme ein Compteralgebrasystem.
   (b) Zeigen Sie, dass jede Lösung des Zweiten Teils des Rinderproblems für $k = al^2$, wobei l eine Lösung der Pellschen Gleichung
$$h^2 = dl^2 + 1$$
   mit $d = 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 29 \cdot 353 \cdot (2 \cdot 4657)^2$ ist und $a = 3 \cdot 11 \cdot 29 \cdot 4657$, gegeben ist. Folgern Sie, dass es eine Lösung des Rinderproblems gibt.
   Hinweis: Berechnen Sie Primfaktorzerlegungen mit einem Rechner. Für eine Dreieckszahl n ist $8n + 1$ eine Quadratzahl.

(5 Bonus Punkte)

4. Betrachten Sie die Markoff Gleichung

$$x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz.$$

   (a) Zeigen Sie, ist x_0, y_0, z_0 eine Lösung der Markoff Gleichung, so ist auch $x_0, y_0, 3x_0y_0 - z_0$ eine Lösung der Markoff Gleichung.

   (b) Zeigen Sie, dass sich jede positive Ganzzahlige Lösung (x, y, z) mit $x \leq y \leq z$ der Markoff Gleichung mithilfe von Aufgabenteil (a) auf die Lösung $(1, 1, 1)$ reduziern lässt.

(5 Bonus Punkte)

Abgabe bis spätestens **Dienstag** den 28.04.2020 um **10:00 Uhr** per Mail an **kattler@math.uni-sb.de**