Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1 Mathematik
Jun. Prof. Dr. S. Brandhorst
Msc. P. Kattler

20. Mai 2020

Algebraische Zahlentheorie I
Sommersemester 2020
Blatt 6

1. Seien $\mathcal{O}$ ein Dedekindring und $\mathfrak{p}$ ein Primideal in $\mathcal{O}$.
   (a) Zeigen Sie, dass ${}^{\mathfrak{p}^1}\!/_{\mathfrak{p}^n}, \dots, {}^{\mathfrak{p}^{n-1}}\!/_{\mathfrak{p}^n}$ die einzigen echten Ideale von ${}^{\mathcal{O}}\!/_{\mathfrak{p}^n}$ sind.
   (b) Zeigen Sie, dass das Ideal ${}^{\mathfrak{p}^\nu}\!/_{\mathfrak{p}^n}$ von $\pi^\nu + \mathfrak{p}^n$ erzeugt wird, wobei $\pi \in \mathfrak{p}^\nu \setminus \mathfrak{p}^{\nu+1}$.
   (c) Sei $\mathfrak{a}$ ein Ideal von $\mathcal{O}$. Zeigen Sie, dass ${}^{\mathcal{O}}\!/_{\mathfrak{a}}$ ein Hauptidealring ist.
   Hinweis: Chinesischer Restsatz
   (d) Folgern Sie aus (c), dass jedes Ideal eines Dedekindringes von zwei Elementen erzeugt wird.

(5 Punkte)

2. Sei $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-5})$ und $\mathfrak{p} = (2, 1 + \sqrt{-5})$ ein Ideal in $\mathcal{O}_K$.
   (a) Zeigen Sie, dass die Ordnung der Nebenklasse $\mathfrak{p}P_K$ in der Klassengruppe Cl_K zwei ist.
   (b) Berechnen Sie $\mathfrak{p}^{-1}$ und prüfen Sie, dass $\mathfrak{p}^{-1} \cdot \mathfrak{p} = \mathcal{O}_K$. **(5 Punkte)**

3. Sei Γ ein vollständiges Gitter im euklidischen Vektorraum V mit $\dim(X) = n$ und sei $X \subseteq V$ zentralsymmetrisch und konvex. Sei ferner X kompakt. Ist
$$vol(X) \geq 2^n vol(\Gamma),$$
so enthält X einen von Null verschiedenen Gitterpunkt $\gamma \in \Gamma$. **(5 Punkte)**

4. Seien $a_m, \dots, a_m$ positive reelle Zahlen und $Z(t) = \{x \in \mathbb{R}^m | x_i \geq 0, \sum x_i \leq t\}$. Wir definieren
$$I(a_1, \dots, a_m; t) := \int_{Z(t)} x_1^{a_1} \cdots x_m^{a_m} dx.$$
In dieser Aufgabe bezeichnet Γ die Gammafunktion.
   (a) Benutzen Sie die Identität
$$\int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1} dx = \frac{\Gamma(n)\Gamma(m)}{\Gamma(m+n)}$$
   um die Identität
$$I(a_1, \dots, a_m; 1) = \frac{\Gamma(a_1+1) \cdots \Gamma(a_m+1)}{\Gamma(a_1 + \cdots + a_m + m + 1)}$$
   zu zeigen.
   (b) Folgern Sie
$$I(a_1, \dots, a_m; t) = t^{\sum a_i + m} \frac{\Gamma(a_1+1) \cdots \Gamma(a_m+1)}{\Gamma(a_1 + \cdots + a_m + m + 1)}.$$

(5 Punkte)

Abgabe bis spätestens **Mittwoch** den 27.05.2020 um **10:00 Uhr** per Mail an **kattler@math.uni-sb.de**