Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1 Mathematik
Jun. Prof. Dr. S. Brandhorst
Msc. P. Kattler

03. Juni 2020

Algebraische Zahlentheorie I
Sommersemester 2020
Blatt 8

1. (a) Bestimmen Sie die Fundamentaleinheiten des Zahlkörpers $\mathbb{Q}(\sqrt{37})$.
   (b) Bestimmen Sie alle Zahlkörper K, deren Ganzheitsringe $\mathcal{O}_K$ endlich viele Einheiten besitzen. Bestimmen Sie diese Einheitengruppen explizit. **(5 Punkte)**

2. (a) Zeigen Sie, dass $\mathbb{Q}(\sqrt{-23})$ die Klassenzahl 3 hat.
   (b) Zeigen Sie, dass $\mathbb{Q}(\sqrt{-47})$ die Klassenzahl 5 hat. **(5 Punkte)**

3. Sei K ein algebraischer Zahlkörper vom Grad d. Zeigen Sie, dass es im Allgemeinen kein $\alpha \in \mathcal{O}_K$ gibt, sodass $\mathcal{O}_K = \mathbb{Z}[\alpha]$.
   (a) Zeigen Sie, dass $\mathbb{Z}[\alpha]/p\mathbb{Z}[\alpha]$ isomorph zu $\mathbb{F}_p[X]/\overline{h}$ ist, wobei $\overline{h} = h \bmod p$ und $h \in \mathbb{Z}[X]$ das Minimalpolynom von α ist und zeigen Sie, dass $\mathcal{O}_K/p\mathcal{O}_K$ isomorph zu $\mathbb{Z}[\alpha]/p\mathbb{Z}[\alpha]$ ist, falls die Primzahl p nicht den Index $[\mathcal{O}_K : \mathbb{Z}[\alpha]]$ teilt.
   (b) Zeigen Sie, dass es maximal p Ringhomomorphismen
   $$\mathbb{F}_p[X]/\overline{h} \to \mathbb{F}_p$$
   gibt, mit der Notation aus Aufgabenteil (a).
   (c) Zeigen Sie, dass es mindestens d Ringhomomorphismen
   $$\mathcal{O}_K/p\mathcal{O}_K \to \mathbb{F}_p$$
   gibt, wobei die Primzahl p voll zerlegt in K ist.
   (d) Folgern Sie: Ist p eine in K voll zerlegte Primzahl mit $p < d$, so gilt $p|[\mathcal{O}_K : \mathbb{Z}[\alpha]]$.
   (e) Zeigen Sie, dass 2 voll zerlegt in $\mathbb{Q}(\Theta)$ ist, wobei $X^3 + X^2 - 2X + 8$ das Minimalpolynom von Θ ist. *Hinweis:* Zeigen Sie zunächst, dass (2) unverzweigt ist. Betrachten Sie die Norm der Primidealzerlegungen von (Θ) und $(\Theta + 1)$. Beachten Sie, dass ein Primideal genau dann über (2) liegt, wenn die Norm des Ideals eine Potenz von 2 ist. Schließlich können Sie verwenden: $N_{K|\mathbb{Q}}(\Theta + 1) = 10$. **(5 Punkte)**

4. Seien $\mathcal{O}$ ein Dedekindring und K sein Quotientenkörper und seien $N|L|K$ endliche Körpererererweiterungen von K. Ferner bezeichne $\mathcal{O}_L$ und $\mathcal{O}_N$ die ganzen Abschlüsse von $\mathcal{O}$ in L und N.
   (a) Zeigen Sie, dass $\mathfrak{a} = \mathcal{O}_L\mathfrak{a} \cap \mathcal{O}$ für jedes Ideal $\mathfrak{a}$ von $\mathcal{O}$.
   (b) Zeigen Sie, dass $\mathfrak{a}|\mathfrak{b}$ genau dann, wenn $\mathcal{O}_L\mathfrak{a}|\mathcal{O}_L\mathfrak{b}$, für alle Ideale $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ von $\mathcal{O}$.
   (c) Seien nun K, L, N zusätzlich algebraische Zahlkörper. Zeigen Sie: Ist das Primideal $\mathfrak{p}$ von $\mathcal{O}$ voll zerlegt in $\mathcal{O}_N$, so auch in $\mathcal{O}_L$.

(5 Punkte)

Abgabe bis spätestens **Mittwoch** den 10.06.2020 um **10:00 Uhr** per Mail an **kattler@math.uni-sb.de**