Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1 Mathematik
Jun. Prof. Dr. S. Brandhorst
Msc. P. Kattler

10. Juni 2020

Algebraische Zahlentheorie I
Sommersemester 2020
Blatt 9

1. Sei $L|K$ eine galoissche Körpererweiterung algebraischer Zahlkörper mit nicht-zyklischer Galoisgruppe. Zeigen Sie, dass es höchstens endlich viele unzerlegte Primideale von K gibt. Dabei nennen wir ein primideal $\mathfrak{p} \leq \mathcal{O}_K$ unzerlegt, falls $\mathfrak{p}\mathcal{O}_L = \mathfrak{P}^e$ für ein Primideal $\mathfrak{P} \leq \mathcal{O}_L$ ist.
Hinweis: Wie sieht die Galoisgruppe einer Erweiterung endlicher Körper aus? **(5 Punkte)**

2. Sei $L|K$ eine galoissche Körpererweiterung algebraischer Zahlkörper und $\mathfrak{p}$ ein über K unverzweigtes Primideal und $\mathfrak{p} = \mathfrak{P} \cap K$. Zeigen Sie, dass es genau einen Automorphismus $\varphi \in Gal(L|K)$ gibt, mit

$$\varphi(a) \equiv a^q \bmod \mathfrak{P}$$

für alle $a \in \mathcal{O}_L$ und $q = \left| \mathcal{O}_K / \mathfrak{p} \right|$. Zeigen Sie ferner, dass die Zerlegungsgruppe $G_{\mathfrak{P}}$ von φ erzeugt wird, also zyklisch ist. **(5 Punkte)**

3. Beschreiben Sie alle quadratischen Teilkörper von $\mathbb{Q}(\xi_n)|\mathbb{Q}$, wobei n ungerade und ξ_n eine primitive n-te Einheitswurzel ist. **(5 Punkte)**

4. (a) Zeigen Sie, dass

$$\left(\frac{a}{p}\right) \equiv a^{\frac{p-1}{2}} \bmod p$$

für alle ungeraden Primzahlen p und zu p teilerfremden Zahlen a.

(b) Berechnen Sie

$$\left(\frac{15}{101}\right).$$

(c) Stellen Sie die Zahlen $\frac{2}{3}$ und $-\frac{2}{3}$ als $5-$adische Zahlen dar.

(5 Punkte)

Abgabe bis spätestens **Mittwoch** den 17.06.2020 um **10:00 Uhr** per Mail an **kattler@math.uni-sb.de**