

Elementare Zahlentheorie

Übungsblatt 2

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Folgern Sie aus dem *Prinzip des kleinsten Elements* das *Prinzip der vollständigen Induktion*.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Betrachten Sie die Relation $R = \{(a, a), (a, c), (a, d), (b, b), (c, a), (c, c), (c, d), (d, a), (d, c), (d, d)\}$ auf der Menge $\{a, b, c, d\}$. Zeigen Sie, dass R eine Äquivalenzrelation ist und geben Sie die Menge der Äquivalenzklassen an.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Entscheiden Sie für jede der folgenden Aussagen, ob sie stimmen kann. Geben Sie gegebenenfalls ein Beispiel einer solchen Menge M und einer Relation $R \subseteq M \times M$ an oder begründen Sie, warum es eine solche Menge M mit einer Relation $R \subseteq M \times M$ nicht geben kann.

- (i) M hat 4 Elemente und R ist eine Äquivalenzrelation auf M mit drei Äquivalenzklassen.
- (ii) M hat 2 Elemente und R ist reflexiv und symmetrisch, aber nicht transitiv.
- (iii) M hat 2 Elemente und R ist symmetrisch, aber weder reflexiv noch transitiv.
- (iv) M hat 3 Elemente und R ist weder reflexiv, symmetrisch noch transitiv.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Es sei „ $\sim_{\mathbb{Z}}$ “ die aus der Vorlesung bekannte Äquivalenzrelation

$$(a_1, a_2) \sim_{\mathbb{Z}} (b_1, b_2) \Leftrightarrow a_1 + b_2 = a_2 + b_1$$

auf $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Wir bezeichnen mit \mathbb{Z} die Menge der Äquivalenzklassen und mit $[a, b]_{\mathbb{Z}} \in \mathbb{Z}$ die Äquivalenzklasse von $(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

(a) Welche der Vorschriften

- (i) $[a, b]_{\mathbb{Z}} \mapsto a$,
- (ii) $[a, b]_{\mathbb{Z}} \mapsto a + b$

definiert eine Abbildung $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$?

(b) Zeigen Sie, dass jedes $[a, b]_{\mathbb{Z}} \in \mathbb{Z}$ einen Vertreter (a, b) mit $a = 0$ oder $b = 0$ besitzt.

(c) Zeigen Sie, dass die Vorschriften $[a, 0]_{\mathbb{Z}} \mapsto a$ und $[0, a]_{\mathbb{Z}} \mapsto a$ eine Abbildung $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$ definieren. Kennen Sie diese Abbildung?

Abgabe bis spätestens Dienstag, den 23.04.2019, um 12:00 Uhr. Werfen Sie Ihre Lösungsvorschläge in die dafür vorgesehenen Einwurfkästen vor dem Zeichensaal in Gebäude E2 5. Abgabe zu zweit ist möglich. Bitte geben Sie Ihren Namen, Ihre Matrikelnummer und Ihre Übungsgruppe an!