UNIVERSITÄT DES SAARLANDES

Fachrichtung Mathematik
Prof. Dr. Simon Brandhorst
Dr. Tobias Columbus

Elementare Zahlentheorie

Übungsblatt 3

Verwenden Sie auf diesem Übungsblatt stets die Konstruktion der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ aus der Vorlesung sowie Ihnen aus der Vorlesung oder den Übungsblättern bekannte Aussagen über $\mathbb{N}$ und $\mathbb{Z}$.

Aufgabe 1 (4 Punkte)
Zeigen Sie, dass
$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$
für alle $a, b, c \in \mathbb{Z}$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Zeigen Sie, dass
$$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$$
für alle $a, b, c \in \mathbb{Z}$.

Aufgabe 3 (4 Punkte)
Zeigen Sie, dass für $a, b \in \mathbb{Z}$ die Gleichung $a + x = b$ in der Variablen x eine eindeutige Lösung $x \in \mathbb{Z}$ besitzt. Wann liegt die Lösung x im Bild der natürlichen Abbildung $\mathbb{N} \to \mathbb{Z}$, $n \mapsto n$?

Aufgabe 4 (4 Punkte)
Es sei $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ eine Abbildung mit der Eigenschaft, dass $f(a + b) = f(a) + f(b)$ für alle $a, b \in \mathbb{Z}$. Zeigen Sie:

(a) Es gilt $f(0) = 0$.

(b) Es gilt $f(-a) = -f(a)$ für alle $a \in \mathbb{Z}$.

(c) Es gilt $f(a \cdot b) = a \cdot f(b)$ für alle $a, b \in \mathbb{Z}$.

(d) Es gilt $f(a) = a \cdot f(1)$ für alle $a \in \mathbb{Z}$.

(e) Die Vorschrift $f \mapsto f(1)$ definiert eine bijektive Abbildung
$$\left\{ f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \;\middle|\; f(a + b) = f(a) + f(b) \text{ für alle } a, b \in \mathbb{Z} \right\} \to \mathbb{Z}.$$

Abgabe bis spätestens Montag, den 29. 04. 2019, um 12:00 Uhr. Werfen Sie Ihre Lösungsvorschläge in die dafür vorgesehenen Einwurfkästen vor dem Zeichensaal in Gebäude E 2 5. Abgabe zu zweit ist möglich. Bitte geben Sie Ihren Namen, Ihre Matrikelnummer und Ihre Übungsgruppe an!