UNIVERSITÄT DES SAARLANDES

Fachrichtung Mathematik
Prof. Dr. Simon Brandhorst
Dr. Tobias Columbus

Elementare Zahlentheorie

Übungsblatt 4

Verwenden Sie auf diesem Übungsblatt stets die Konstruktion der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ aus der Vorlesung sowie Ihnen aus der Vorlesung oder den Übungsblättern bekannte Aussagen über $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$.

Aufgabe 1 (4 Punkte)
Zeigen Sie, dass

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

für alle $a, b, c \in \mathbb{Q}$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Zeigen Sie, dass für $a \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ und $b, c \in \mathbb{Q}$ die Gleichung

$$a \cdot x + b = c$$

in der Variablen x eine eindeutige Lösung $x \in \mathbb{Q}$ besitzt. Warum müssen wir dafür $a \neq 0$ verlangen?

Aufgabe 3 (4 Punkte)
Für ein fest gewähltes $d \in \mathbb{Z}$ definiert

$$a \equiv b \quad \Longleftrightarrow \quad \exists c \in \mathbb{Z} \text{ mit } d \cdot c = b - a$$

eine Relation „$\equiv$“ auf $\mathbb{Z}$.

(a) Zeigen Sie, dass „$\equiv$“ eine Äquivalenzrelation ist.

(b) Es bezeichne nun $[a]$ die Äquivalenzklasse von $a \in \mathbb{Z}$ bzgl. „$\equiv$“ und $\mathbb{Z}/(d)$ sei die Menge der Äquivalenzklassen. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$+_d \colon \mathbb{Z}/(d) \times \mathbb{Z}/(d) \to \mathbb{Z}/(d), \quad \big([a], [b]\big) \mapsto [a + b]$$

wohldefiniert ist. Ist $\mathbb{Z}/(d)$ mit dieser Verknüpfung eine Gruppe?

(c) Bestimmen Sie für $d = 2$ die Menge der Äuivalenzklassen und beschreiben Sie die Abbildung „$+_2$“ aus Teilaufgabe (b) in diesem Fall möglichst genau.

Bitte wenden!

Aufgabe 4 (4 Punkte)
Es sei M eine Menge, $e \in M$ ein Element und außerdem seien „$\cdot$" und „$*$" zwei Verknüpfungen auf M, so dass sowohl $(M, \cdot, e)$ als auch $(M, *, e)$ Gruppen sind. Weiterhin gelte

$$(x \cdot y) * (x' \cdot y') = (x * x') \cdot (y * y')$$

für alle $x, y, x', y' \in M$.

(a) Zeigen Sie, dass die Verknüpfungen „$\cdot$" und „$*$" übereinstimmen, d. h. dass $x \cdot y = x * y$ für alle $x, y \in M$ gilt.

(b) Zeigen Sie, dass „$\cdot$" kommutativ ist.

Empfehlung (Keine Abgabe)
Wiederholen Sie noch einmal die Peano-Axiome für die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ sowie die Konstruktionen der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ und der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$.

Abgabe bis spätestens Montag, den 06. 05. 2019, um 12:00 Uhr. Werfen Sie Ihre Lösungsvorschläge in die dafür vorgesehenen Einwurfkästen vor dem Zeichensaal in Gebäude E 2 5. Abgabe zu zweit ist möglich. Bitte geben Sie Ihren Namen, Ihre Matrikelnummer und Ihre Übungsgruppe an!