

# Elementare Zahlentheorie

## Übungsblatt 5

### Aufgabe 1 (4 Punkte)

Es seien  $M = \{1, 2, 3\}$  und  $G = \{f: M \rightarrow M \mid f \text{ ist bijektiv}\}$ .

- Zeigen Sie, dass  $G$  mit der Komposition „ $\circ$ “ von Abbildungen eine Gruppe bildet.
- Für welche  $a \in M$  ist  $U_a = \{f \in G \mid f(1) = a\}$  eine Untergruppe von  $G$ ?

### Aufgabe 2 (4 Punkte)

Es seien  $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ . Zeigen Sie die folgenden Implikationen:

- $b \mid a \Rightarrow b \cdot c \mid a \cdot c$ .
- $b \cdot c \mid a \cdot c \Rightarrow b \mid a$  für  $c \neq 0$ .
- $a \mid b$  und  $c \mid d \Rightarrow a \cdot c \mid b \cdot d$ .
- $a \mid b$  und  $b \mid a \Rightarrow a = \pm b$ .

### Aufgabe 3 (4 Punkte)

Es sei  $n \in \mathbb{Z}$  eine ungerade Zahl, die einen Teiler  $a \notin \{\pm 1, \pm n\}$  besitzt.

- Zeigen Sie, dass  $n$  sich als Differenz zweier Quadratzahlen schreiben lässt.
- Erklären Sie, wie man lediglich mit Subtraktionen und einer Liste von Quadratzahlen überprüfen kann, ob eine ungerade Zahl  $n \in \mathbb{Z}$  einen Teiler  $a \notin \{\pm 1, \pm n\}$  besitzt.

### Aufgabe 4 (4 Punkte)

Es seien  $R$  ein Ring und  $f, g: \mathbb{Q} \rightarrow R$  zwei Ringhomomorphismen. Weiter bezeichne  $\iota: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}$  die natürliche Inklusion mit  $\iota(a) = a$ . Zeigen Sie, dass  $f \circ \iota = g \circ \iota$  bereits  $f = g$  impliziert.

### Aufgabe 5 (Keine Abgabe)

Anna bittet Jakob sich eine dreistellige Zahl  $N = abc \in \mathbb{N}$  mit Ziffern  $a, b, c \in \{0, \dots, 9\}$  zu denken und die Ziffern der Zahl umzudrehen, um  $M = cba$  zu erhalten. Anschließend soll Jakob die Differenz der beiden Zahlen  $N$  und  $M$  bilden, so dass er ein nichtnegatives Ergebnis  $K = xyz$  erhält. Die Ziffern von  $K$  soll Jakob nun erneut drehen um  $L = zyx$  zu erhalten. Nach all dieser Rechnerei ruft Anna triumphierend: „Die Summe von  $K$  und  $L$  ist 1089! Toll, oder?“ Jakob hat sich jedoch weder verechnet noch 1089 als Summe von  $K$  und  $L$  herausbekommen.

- Welche Zahl hat Jakob als Summe von  $K$  und  $L$  herausbekommen?
- Für welche dreistelligen Zahlen  $N$  funktioniert Annas Rechenrick?

---

Abgabe bis spätestens Montag, den 13. 05. 2019, um 12:00 Uhr. Werfen Sie Ihre Lösungsvorschläge in die dafür vorgesehenen Einwurfschächte vor dem Zeichensaal in Gebäude E2 5. Abgabe zu zweit ist möglich. Bitte geben Sie Ihren Namen, Ihre Matrikelnummer und Ihre Übungsgruppe an!