UNIVERSITÄT DES SAARLANDES

Fachrichtung Mathematik
Prof. Dr. Simon Brandhorst
Dr. Tobias Columbus

Elementare Zahlentheorie

Übungsblatt 8

Aufgabe 1 (4 Punkte)

(a) Bestimmen Sie alle Lösungen $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ der linearen diophantischen Gleichung

$$6\,x - 9\,y = 15.$$

(b) Bestimmen Sie alle Lösungen $(x, y, z) \in \mathbb{Z}^3$ der linearen diophantischen Gleichung

$$2\,x - 3\,y + 6\,z = 5.$$

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Entscheiden Sie in den folgenden Fällen jeweils, ob es zu $a \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ein multiplikatives Inverses, d. h. ein Element $b \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ mit $a \cdot b = 1$, gibt und berechnen Sie gegebenenfalls ein solches Inverses.

(a) $n = 23$ und $a = 7$,

(b) $n = 667$ und $a = 29$,

(c) $n = 271$ und $a = 63$,

(d) $n = 221$ und $a = 51$.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

(a) Zeigen Sie, dass eine natürliche Zahl genau dann durch 3 teilbar ist, wenn ihre Quersumme durch drei teilbar ist.

Hinweis: Betrachten Sie den Ringhomomorphismus $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ mit $f(a) = a$.

(b) Stellen Sie eine analoge Regel für die Teilbarkeit durch 11 auf und beweisen Sie diese.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Für $n \geq 1$ sei $f(X) = X^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i X^i$ ein Polynom mit Koeffizienten $a_i \in \mathbb{Z}$ und Leitkoeffizient 1. Weiter sei $q \in \mathbb{Q}$ eine rationale Zahl mit $f(q) = 0$. Zeigen Sie, dass dann bereits $q \in \mathbb{Z}$ ist.

Abgabe bis spätestens Montag, den 03. 06. 2019, um 12:00 Uhr. Werfen Sie Ihre Lösungsvorschläge in die dafür vorgesehenen Einwurfkästen vor dem Zeichensaal in Gebäude E 2 5. Abgabe zu zweit ist möglich. Bitte geben Sie Ihren Namen, Ihre Matrikelnummer und Ihre Übungsgruppe and!