Einige Definitionen und Sätze

Sei $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$

Normen auf $\mathbb{R}^n$:

$$\|(x_i)_{i=1}^n\| = \|(x_i)_{i=1}^n\|_2 = (\sum_{i=1}^n |x_i|^2)^{1/2}$$

$$\|(x_i)_{i=1}^n\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$$

$$\|(x_i)_{i=1}^n\|_\infty = \max_{i=1,\ldots,n} |x_i|$$

Offene, abgeschlossene Kugeln im $\mathbb{R}^n$:

$$B_r(a) = \{x \in \mathbb{R}^n;\ \|x - a\| < r\},\ \overline{B}_r(a) = \{x \in \mathbb{R}^n;\ \|x - a\| \leq r\}.$$

Eine Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ heißt

- **offen** $:\Leftrightarrow \forall x \in M \exists\ r > 0$ mit $B_r(x) \subset M$
- **abgeschlossen** $:\Leftrightarrow \forall$ Folgen (x_k) in M, die gegen eine $x \in \mathbb{R}^n$ konvergieren, ist $x \in M$
- **kompakt** $:\Leftrightarrow M \subset \mathbb{R}^n$ ist abgeschlossen und beschränkt.

Vorsicht:
Die Definition von kompakten Mengen macht so nur im $\mathbb{R}^n$ (oder $\mathbb{C}^n$) Sinn, aber nicht in unendlich dimensionalen normierten Räumen.

Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}^m$ auf einer Menge $D \subset \mathbb{R}^n$ heißt **stetig**, falls $f(x) = \lim_{k\to\infty} f(x_k)$ gilt für jede Folge (x_k) in D mit $\lim_{k\to\infty} x_k = x \in D$. Sie heißt **gleichmäßig stetig**, falls

$$\forall \epsilon > 0 \exists\ \delta > 0 \text{ mit } \|f(x) - f(y)\| < \epsilon\ \forall x, y \in D \text{ mit } \|x - y\| < \delta.$$

Wichtige Sätze über stetige Funktionen:

Zwischenwertsatz (ZWS): Ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und ist $f(a) < y < f(b)$ oder $f(a) > y > f(b)$, so ist $y \in f([a, b])$.

Stetige Funktionen auf kompakten Mengen: Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt.

- Ist $f : K \to \mathbb{R}$ stetig, so gibt es Elemente $x, y \in K$ mit

$$f(x) = \min f(K),\ f(y) = \max f(K).$$

- Ist $f : K \to \mathbb{R}^m$ stetig, so ist $f(K) \subset \mathbb{R}^m$ kompakt.
- Jede stetige Funktion $f : K \to \mathbb{R}^m$ ist gleichmäßig stetig.

Funktionenräume:
Man schreibt für $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$, eine offene Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ und $k \in \{1, 2 \ldots\} \cup \{\infty\}$:

$$\begin{aligned} C[a,b] &= \{f; f : [a,b] \to \mathbb{R} \text{ stetig}\}, \\ C^k[a,b] &= \{f; f : [a,b] \to \mathbb{R} \text{ ist } k\text{-mal stetig differenzierbar}\}, \\ C^k(U, \mathbb{R}^m) &= \{f; f : U \to \mathbb{R}^m \text{ ist } k\text{-mal stetig partiell differenzierbar}\}. \end{aligned}$$

Eine Funktion $f : U \to \mathbb{R}^m$ heißt k-mal **stetig partiell differenzierbar**, wenn alle **partiellen Ableitungen**

$$\partial^\alpha f = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}} : U \to \mathbb{R}^m$$

($\alpha \in \mathbb{N}^n$ mit $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n \leq k$) existieren und stetig sind. Hierbei nennt man eine Funktion $f : U \to \mathbb{R}^m, x \mapsto (f_i(x))_{i=1}^m$ k-mal stetig partiell differenzierbar, wenn alle Koordinatenfunktionen $f_i : U \to \mathbb{R}$ diese Eigenschaft haben und definiert die partiellen Ableitungen $\partial^\alpha f : U \to \mathbb{R}^m$ komponentenweise durch

$$\partial^\alpha f = (\partial^\alpha f_i)_{i=1}^m.$$

Matrixnormen:
Für $\alpha \in \{1, 2, \infty\}$ und eine Matrix $A = (a_{ij}) \in M(n, \mathbb{R})$ ist die Funktion

$$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ x \mapsto \|Ax\|_\alpha$$

stetig und nimmt daher ihr Supremum

$$\|A\|_\alpha := \sup\{\|Ax\|_\alpha;\ \|x\|_\alpha \leq 1\} < \infty$$

an auf dem Kompaktum $\{x \in \mathbb{R}^n;\ \|x\|_\alpha \leq 1\} \subset \mathbb{R}^n$. Die Abbildung

$$M(n, \mathbb{R}) \to \mathbb{R},\ A \mapsto \|A\|$$

definiert eine vollständige Norm auf $M(n, \mathbb{R})$. Es gilt für alle $A, B \in M(n, \mathbb{R})$ und $x \in \mathbb{R}^n$

(i) $\|Ax\|_\alpha \leq \|A\|_\alpha \ \|x\|_\alpha$,

(ii) $\|AB\|_\alpha \leq \|A\|_\alpha \ \|B\|_\alpha$.

Genauso kann man Normen auf $M(m \times n, \mathbb{R})$ definieren. Die Eigenschaften (i) und (ii) bleiben sinngemäß richtig.

Mittelwertsätze: Sei $\alpha \in \{1, 2, \infty\}$.

- Für $f \in C^1[a, b]$ gibt es ein $\xi \in]a, b[$ mit $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$.
- Ist $f : U \to \mathbb{R}^m$ eine C^1-Funktion auf einer offenen Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ und ist $K \subset U$, so gilt:
  (a) Ist K kompakt, so ist $\sup_{x\in K} \|J_f(x)\|_\alpha < \infty$.
  (b) Ist K konvex und $c := \sup_{x\in K} \|J_f(x)\|_\alpha < \infty$, so ist
  $$\|f(x) - f(y)\|_\alpha \leq c\|x - y\|_\alpha \qquad \forall x, y \in K.$$

Hierbei heißt eine Menge $K \subset \mathbb{R}^n$ **konvex**, wenn $tx + (1 - t)y \in K$ gilt für alle $x, y \in K$ und $t \in [0, 1]$ und

$$J_f(x) = (\partial_j f_i(x)) \in M(m \times n, \mathbb{R})$$

bezeichnet die **Jacobi-Matrix** von f.

Taylorentwicklung: (eindimensional)

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall (egal ob offen, abgeschlossen, halboffen, beschränkt oder unbeschränkt), sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine $(n + 1)$-mal differenzierbare Funktion auf I und seien $a, x \in I$ mit $a \neq x$. Dann gibt es ein $\xi \in]\min(x, a), \max(x, a)[$ mit

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x - a)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n + 1)!}(x - a)^{n+1}.$$

Taylorentwicklung: (mehrdimensional)

Für $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ und $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ schreibt man

$$|\alpha| = a_1 + \ldots + \alpha_n,\ \alpha! = (\alpha_1!)(\alpha_2!)\cdots(\alpha_n)!,\ x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}.$$

Seien $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $x \in U, \xi \in \mathbb{R}^n$ mit $x + t\xi \in U$ für alle $t \in [0, 1]$. Ist $f \in C^{k+1}(U)$, so gibt es ein $\theta \in [0, 1]$ mit

$$f(x + \xi) = \sum_{|\alpha|\leq k} \frac{(\partial^\alpha f)(x)}{\alpha!}\xi^\alpha + \sum_{|\alpha|=k+1} \frac{(\partial^\alpha f)(x + \theta\xi)}{\alpha!}\xi^\alpha.$$

Beweise findet man in [O. Forster, Analysis I, II] oder [Eschmeier, Skript zur Vorlesung Analysis I, Satz 20.1, Skript zur Vorlesung Analysis II, Satz 7.2].