Denn für $Ax = \lambda x$ ist $A^k x = A^{k-1}(\lambda x) = \lambda A^{k-1}(x) = \ldots = \lambda^k x$.

Für $\mu \in \sigma(A^k)$ betrachte die Linearfaktorzerlegung

$$z^k - \mu = \prod_{i=1}^{k} (z - \lambda_i).$$

Ist $A^k - \mu = \prod_{i=1}^{k} (A - \lambda_i)$ nicht injektiv, so ist $A - \lambda_i$ nicht injektiv für ein $i \in \{1, \ldots, n\}$. Also ist $\mu = \lambda_i^k$ mit $\lambda_i \in \sigma(A)$.

<u>Korollar 3.12</u> Ist $A = (a_{ij}) \in M(n, \mathbb{R})$ symmetrisch, so ist

$$\|A\|_2 = \varrho(A).$$

<u>Bew.</u>: $\|A\|_2 \overset{3.8}{=} \varrho(A^tA)^{\frac{1}{2}} = \varrho(A^2)^{\frac{1}{2}} \overset{3.11}{=} (\varrho(A)^2)^{\frac{1}{2}} = \varrho(A)$. ☒

B <u>Iterative Lösungen linearer Gleichungssysteme</u>

Gegeben sei das lineare Gleichungssystem

$$(*) \qquad Ax = b \qquad (A \in M(n, \mathbb{R}),\ b \in \mathbb{R}^n).$$

Für $B \in M(n, \mathbb{R})$ regulär ist $(*)$ äquivalent zu

$$Bx = (B - A)x + b \iff x = B^{-1}(B - A)x + B^{-1}b$$

und damit zur Fixpunktgleichung $\Phi(x) = x$ mit

$$(**) \quad \Phi(x) = Cx + r,$$

wobei C und r gegeben sind durch

$$C = B^{-1}(B - A) = I - B^{-1}A \quad (\underline{\text{Iterationsmatrix}}),$$

$$r = B^{-1}b.$$

Konvergiert für einen Startwert $x_0 \in \mathbb{R}^n$ die Folge

$$x_{k+1} = \Phi(x_k) = Cx_k + r \quad (k \geq 0),$$

so ist der Grenzwert x_* Lösung von (*) ($\Leftrightarrow$ von (**)):

$$x_* = \lim_{k\to\infty} x_{k+1} = \lim_{k\to\infty} \Phi(x_k) = \Phi\left(\lim_{k\to\infty} x_k\right) = \Phi(x_*)$$

und man erhält eine Fehlerabschätzung mit

$$(***) \qquad x_k - x_* = \Phi(x_{k-1}) - \Phi(x_*) = C(x_{k-1} - x_*) = \ldots = C^k(x_0 - x_*),$$

<u>Satz 3.13</u> Seien $\alpha \in \{1, 2, \infty\}$, $A \in M(n, \mathbb{R})$. Ist $B \in M(n, \mathbb{R})$ regulär und gilt für die Iterationsmatrix $C = I - B^{-1}A$

$$\| C \|_\alpha < 1,$$

so hat für jedes $b \in \mathbb{R}^n$ die Fixpunktgleichung

$$x = Cx + B^{-1}b \qquad (\Leftrightarrow Ax = b)$$

genau eine Lösung $x_* \in \mathbb{R}^n$. Das Iterationsverfahren

$$x_{k+1} = Cx_k + B^{-1}b \qquad (k \geq 0)$$

konvergiert für jeden Startwert $x_0 \in \mathbb{R}^n$ gegen x_* und $\forall k \in \mathbb{N}$

(i) $$\| x_k - x_* \|_\alpha \leq \frac{\| C \|_\alpha^k}{1 - \| C \|_\alpha} \| x_1 - x_0 \|_\alpha$$

(ii) $$\| x_k - x_* \|_\alpha \leq \| C \|_\alpha^k \, \| x_0 - x_* \|_\alpha .$$

<u>Beweis</u> Die Abbildung $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$,

$$\Phi(x) = Cx + B^{-1}b$$

ist eine Kontraktion

$$\| \Phi(x) - \Phi(y) \|_\alpha = \| C(x-y) \|_\alpha \leq \| C \|_\alpha \, \| x-y \|_\alpha \ \forall x, y \in \mathbb{R}^n.$$

$\Rightarrow$ Alles bis auf (ii) folgt aus dem Banachschen Fixpunktsatz (Satz 1.5). Die Abschätzung (ii) folgt aus (***). ☒

Man kann zeigen ([Plato, Theorem 9.12, Theorem 10.3]):

Satz 3.14 Seien $A, B \in M(n, \mathbb{R})$ mit $\det(B) \neq 0$ und sei

$$C = I - B^{-1}A.$$

Äquivalent sind:

(i) $\varrho(C) < 1$,

(ii) A ist regulär und für alle $b \in \mathbb{R}^n$ und jeden Startwert $x_0 \in \mathbb{R}^n$ konvergiert die Folge

$$x_{k+1} = Cx_k + B^{-1}b$$

gegen die eindeutige Lösung von $Ax_* = b$.

(iii) Es gibt eine Norm auf $\mathbb{R}^n$ so, dass

$$\|C\| < 1$$

für die zugehörige Matrixnorm $\|\cdot\| : M(n, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ gilt.

Beispiel 3.15 Für $A = \left(\begin{array}{c|c} 0.1 & -0.4 \\ \hline -0.4 & 0.8 \end{array}\right) \in M(2, \mathbb{R})$ gilt

$$\|A\|_\infty \overset{3.8}{=} \max(0.5, 1.2) = 1.2$$

$$\|A\|_2 = \frac{1}{10} \| \underbrace{\left(\begin{array}{c|c} 1 & -4 \\ \hline -4 & 8 \end{array}\right)}_{=: C} \|_2 \overset{3.12}{=} \varrho(C).$$

Die Eigenwerte von C sind genau die Nullstellen von

$$\det(C - xI) = (1-x)(8-x) - 16 = x^2 - 9x - 8 = \left(x - \frac{9}{2}\right)^2 - \left(\frac{81}{4} + 8\right)$$

$$\Rightarrow \sigma(C) = \left\{ \frac{9}{2} \pm \frac{\sqrt{113}}{2} \right\}$$

$$\varrho(C) = \frac{9}{2} + \frac{\sqrt{113}}{2} < 10 \quad (\text{da } \sqrt{113} < 11)$$

Also ist $\|A\|_2 < 1 < \|A\|_\infty$.

C Das Jacobi- und Gauß-Seidel Verfahren

Sei $A = (a_{ij}) \in M(n,\mathbb{R})$ mit $a_{ii} \neq 0$ für $i = 1,\dots,n$. Wir schreiben

$$A = D - L - U$$

mit $D = \operatorname{diag}(a_{11},\dots,a_{nn}) = \begin{pmatrix} a_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn} \end{pmatrix}$ und

$$L = -\begin{pmatrix} 0 & \dots & & 0 \\ a_{21} & 0 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{n,n-1} & 0 \end{pmatrix}, \quad U = -\begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & a_{n-1,n} \\ 0 & & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

(1) Wählt man $B = D$, so erhält man die Iterationsmatrix

$$C = C_{Jac} = I - D^{-1}A = D^{-1}(D-A) = D^{-1}(L+U).$$

Das zugehörige Iterationsverfahren (Jacobi- oder Gesamtschrittverfahren) hat die Form

$$x^{k+1} = \Phi(x^k) = C_{Jac}x^k + D^{-1}b = D^{-1}\left((L+U)x^k + b\right)$$

oder komponentenweise geschrieben

$$x_i^{k+1} = -\frac{1}{a_{ii}}\Big(\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} a_{ij}x_j^k - b_i\Big) \quad (i = 1,\dots,n).$$

(2) Wählt man $B = D - L$, so erhält man die Iterationsmatrix

$$C = C_{GS} = I - (D-L)^{-1}A = (D-L)^{-1}(D-L-A) = (D-L)^{-1}U.$$

Das zugehörige Iterationsverfahren (Gauß-Seidel Verfahren) hat die Form

$$x^{k+1} = C_{GS}x^k + (D-L)^{-1}b = (D-L)^{-1}(Ux^k + b)$$

$$\Leftrightarrow \quad Dx^{k+1} = Lx^{k+1} + Ux^k + b$$

oder komponentenweise gelesen

$$a_{ii}x_i^{k+1} = -\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{k+1} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^k + b_i$$

$$\Leftrightarrow \quad x_i^{k+1} = -\frac{1}{a_{ii}}\Big(\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{k+1} + \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^k - b_i\Big) \quad (\forall i = 1,\dots,n).$$

Man berechnet rekursiv die Komponenten der Vektoren x^k in der Reihenfolge

$$x_1^1, x_2^1, \dots, x_n^1, x_1^2, x_2^2, \dots, x_n^2, \dots \quad .$$

<u>Frage:</u> Unter welchen Bedingungen konvergieren diese Verfahren?

<u>Satz 3.16</u> Sei $A = (a_{ij}) \in M(n,\mathbb{R})$ mit $a_{ii} \neq 0$ für $i = 1, \dots, n$.

(a) Ist A <u>strikt diagonal dominant</u>, d.h. gilt

(i) $$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}| < |a_{ii}| \quad \text{für } i = 1, \dots, n$$

oder ist A^t strikt diagonal dominant, d.h.

(ii) $$\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} |a_{ij}| < |a_{jj}| \quad \text{für } j = 1, \dots, n,$$

so konvergiert das Jacobi-Verfahren für jeden Startvektor $x^0 \in \mathbb{R}^n$.

(b) Gilt für die rekursiv definierten Zahlen

$$p_i = \sum_{j=1}^{i-1} \left| \frac{a_{ij}}{a_{ii}} \right| p_j + \sum_{j=i+1}^{n} \left| \frac{a_{ij}}{a_{ii}} \right| \quad (i = 1, \dots, n)$$

die Ungleichung

$$p = \max_{i=1,\dots,n} p_i < 1$$

oder ist A positiv definit (§8.1 in [Bildhauer]), so konvergiert das Gauß-Seidelverfahren für jeden Startvektor $x^0 \in \mathbb{R}^n$.

<u>Ideen zu (a)</u> Wegen

$$\| C_{Jac} \|_\infty = \| 1 - D^{-1} A \|_\infty \overset{3.8}{=} \max_{i=1,\dots,n} \sum_{j=1}^{n} \left| \delta_{ij} - \frac{a_{ij}}{a_{ii}} \right|$$

$$= \max_{i=1,\dots,n} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \left| \frac{a_{ij}}{a_{ii}} \right| \overset{(i)}{<} 1$$

folgt die Behauptung im Fall (i) aus Satz 3.13 mit $\alpha = \infty$. Für den Fall (ii) rechnet man genauso nach, dass

$$\| I - AD^{-1} \|_1 \overset{3.8}{=} \max_{j=1,\dots,n} \sum_{i=1}^{n} \left| \delta_{ij} - \frac{a_{ij}}{a_{jj}} \right| = \max_{j=1,\dots,n} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} \left| \frac{a_{ij}}{a_{jj}} \right|.$$

Wegen

$$\varrho(C_{Jac}) = \varrho(D\, C_{Jac} D^{-1}) = \varrho(I - AD^{-1}) \overset{3.7}{\leq} \| I - AD^{-1} \|_1$$

folgt die Behauptung im Fall (ii) mit Satz 3.14.

Zu (b) Induktiv folgt für $i = 1, \dots, n$, dass

$$\sup_{\|x\|_\infty} |(C_{GS}x)_i| \leq p_i$$

ist. Also folgt die Behauptung für $p < 1$ wieder mit Satz 3.13. Die Behauptung im positiv definiten Fall wird in [Deuflhard - Hohmann, Satz 8.14] bewiesen. ☒

Bemerkung 3.17 Nach Satz 3.13 gilt

$$\| x_k - x_* \|_\infty \leq \frac{\|C\|_\infty^k}{1 - \|C\|_\infty} \| x_1 - x_0 \|_\infty.$$

Also bestimmt die Norm $\|C\|_\infty$ die Konvergenzgeschwindigkeit des Verfahrens. Für strikt diagonal dominante Matrizen A kann man zeigen, dass

$$\| C_{GS} \|_\infty \leq \| C_{Jac} \|_\infty \leq 1.$$

Beispiel 3.18 Sei $A = \left(\begin{array}{c|c} 4 & 2 \\ -1 & 2 \end{array}\right)$ und $b = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$.
Die exakte Lösung von $Ax_* = b$ ist $x_* = A^{-1}b = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.
Offensichtlich ist A strikt diagonal dominant. Sei $x^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Jacobi-Verfahren:

$$C_{Jac} = I - D^{-1}A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

$$x^1 = C_{Jac} x^0 + D^{-1} b = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -3/2 \end{pmatrix}$$

$$x^2 = C_{Jac} x^1 + D^{-1} b = \begin{pmatrix} 3/4 \\ 1/4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/2 \\ -3/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/4 \\ -5/4 \end{pmatrix}.$$

Es ist $\| C_{Jac} \|_\infty = \frac{1}{2}$ und

$$\| x^2 - x_* \|_\infty = \left\| \begin{pmatrix} 1/4 \\ -1/4 \end{pmatrix} \right\|_\infty = \frac{1}{4}.$$

<u>Gauß-Seidel-Verfahren</u>

$$C_{GS} = I - (D-L)^{-1} A = I - \left(\begin{array}{c|c} 4 & 0 \\ \hline -1 & 2 \end{array}\right)^{-1} \left(\begin{array}{c|c} 4 & 2 \\ \hline -1 & 2 \end{array}\right)$$

$$= I - \frac{1}{8} \left(\begin{array}{c|c} 2 & 0 \\ \hline 1 & 4 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} 4 & 2 \\ \hline -1 & 2 \end{array}\right) = I - \frac{1}{8} \left(\begin{array}{c|c} 8 & 4 \\ \hline 0 & 10 \end{array}\right)$$

$$= \left(\begin{array}{c|c} 0 & -\frac{1}{2} \\ \hline 0 & -\frac{1}{4} \end{array}\right)$$

Also ist $\| C_{GS} \|_\infty = \frac{1}{2}$ und

$$x^1 = C_{GS} x^0 + (D-L)^{-1} b = \frac{1}{8} \left(\begin{array}{c|c} 2 & 0 \\ \hline 1 & 4 \end{array}\right) \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -5/4 \end{pmatrix}$$

$$x^2 = C_{GS} x^1 + (D-L)^{-1} b = \begin{pmatrix} 5/8 \\ 5/16 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/2 \\ -5/4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9/8 \\ \hline -15/16 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \| x^2 - x_* \|_\infty = \left\| \begin{pmatrix} 1/8 \\ 1/16 \end{pmatrix} \right\|_\infty = \frac{1}{8}.$$

§4 Gewöhnliche Differentialgleichungen

A Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen

Beispiel 4.1 Sei $a \in \mathbb{R}$. Gesucht: Alle $y \in C^1(\mathbb{R})$ mit

$$y' = ay \quad (\text{d.h. } y'(t) = a\,y(t) \ \forall t \in \mathbb{R})$$

Lösung (i) Für $c \in \mathbb{R}$ ist

$$\varphi_c : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \varphi_c(t) = c\,e^{at}$$

eine Lösung.

(ii) Ist umgekehrt $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Lösung, so gilt

$$\frac{d}{dt}\left(\varphi(t)\,e^{-at}\right) = \left(\varphi'(t) - a\,\varphi(t)\right)e^{-at} = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \quad \varphi(t)\,e^{-at} \equiv \varphi(0), \text{ also } \varphi(t) = \varphi(0)\,e^{at} \ \forall t \in \mathbb{R}$$

Fazit Für jedes $y_0 \in \mathbb{R}$ ist $\varphi_{y_0} : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ t \mapsto y_0 e^{at}$ die eindeutige Lösung von

$$y' = ay, \quad y(0) = y_0 \quad (\text{Anfangswertproblem})$$

Sei $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n = \{(t,y);\ t \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}^n\}$ und sei $f : G \to \mathbb{R}^n$ stetig.

Def. 4.2 Sei $(t_0, y_0) \in G$. Eine Lösung des Anfangswertproblems (AWP)

$$y' = f(t,y), \quad y(t_0) = y_0$$

ist eine differenzierbare Funktion $y : I \to \mathbb{R}^n$ auf einem Intervall $I \subset \mathbb{R}$ mit $t_0 \in I$, $\operatorname{Graph}(y) = \{(t, y(t));\ t \in I\} \subset G$ und

$$y'(t) = f(t, y(t)) \ \forall t \in I, \quad y(t_0) = y_0 \quad (\Rightarrow y \in C^1(I, \mathbb{R}^n))$$

In Beispiel 4.1 ist $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(t,y) = ay$. Für jedes $y_0 \in \mathbb{R}$ ist

$$y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad t \mapsto y_0 e^{at}$$

die eindeutige Lösung des AWP's

$$y' = a y, \quad y(0) = y_0.$$

<u>Satz von Peano</u> (1890)

Sei $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen und $f : G \to \mathbb{R}^n$ stetig, $(t_0, y_0) \in G$

$\Rightarrow$ $\exists$ Lösung $y : I \to \mathbb{R}^n$ des AWP's

$$y' = f(t,y), \quad y(t_0) = y_0$$

auf einem offenen Intervall $I \subset \mathbb{R}$ mit $t_0 \in I$.

<u>Beispiel 4.3</u> Das AWP

$$y' = \sqrt{|y|}, \quad y(2) = 1 \qquad \left(\text{d.h.: } f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(t,y) = \sqrt{|y|},\ (t_0, y_0) = (2,1) \right)$$

hat unendlich viele Lösungen. Für jedes $s \le 0$ ist $\varphi_s : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$\varphi_s(t) = \begin{cases} t^2/4 & ; \ t > 0 \\ 0 & ; \ s \le t \le 0 \\ -\frac{(t-s)^2}{4} & ; \ t < s \end{cases}$$

eine Lösung (Prüfen!)

Für hinreichend schönes f kann das nicht passieren!

<u>Def. 4.4</u> Eine Funktion $f : G \to \mathbb{R}^n$ $(G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$ genügt einer

- <u>Lipschitzbedingung</u> (in y glm. in t) <u>mit Konstante $L > 0$</u>, falls

$$\| f(t,y) - f(t,\tilde{y}) \| \le L \| y - \tilde{y} \| \quad \forall (t,y), (t,\tilde{y}) \in G.$$

- <u>lokal einer Lipschitzbedingung in y</u>, falls $\forall (t_0, y_0) \in G\ \exists r > 0$ so, dass

$$f|_{B_r(t_0,y_0) \cap G}$$ einer Lipschitzbedingung genügt.

Lemma 4.5 Sei $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen

$\Rightarrow$ Jede Funktion $f \in C^1(G, \mathbb{R}^n)$ genügt lokal einer Lipschitzbedingung in y

Idee für $n = 1$: Wähle für $(t_0, y_0) \in G$ eine Kugel $K = \bar{B}_r(t_0, y_0) \subset G$

$\Rightarrow$ Für $(t, y), (t, \tilde{y}) \in K$ gilt

$$|f(t,y) - f(t,\tilde{y})| = \left| \int_y^{\tilde{y}} \frac{\partial f}{\partial s}(t,s)\, ds \right| \leq \sup_{\xi \in K} \left| \frac{\partial f}{\partial s}(\xi) \right| \, |y - \tilde{y}|$$

Für $n > 1$ folgt die Behauptung aus Satz 1.7 (b). ▨

Bemerkung 4.6 Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $a \in I$, $y : I \to \mathbb{R}^n$ eine Funktion mit

$\text{Graph}(y) \subset G$

Für $f : G \to \mathbb{R}^n$ stetig gilt nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung (komponentenweise angewendet)

$$y'(t) = f(t, y(t)) \quad \forall\, t \in I$$

$$\Leftrightarrow \quad y(t) = y(a) + \int_a^t f(s, y(s))\, ds \quad \forall\, t \in I$$

Satz 4.7 (Eindeutigkeitssatz) Sei $f : G \to \mathbb{R}^n$ ($G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$) stetig und lokal Lipschitz in y. Sind $y_1, y_2 : I \to \mathbb{R}^n$ Lösungen des AWP's

$$y' = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0,$$

so gilt $y_1 = y_2$ auf I.

Idee: Sei $a \in I$ mit $y_1(a) = y_2(a)$ (etwa $a = t_0$)

$$\overset{4.6}{\Longrightarrow} \quad \|y_1(t) - y_2(t)\| \leq \int_a^t \| f(s, y_1(s)) - f(s, y_2(s)) \|\, ds$$

$\leq$ (für $t \in [a, a+\delta]$ mit $\delta > 0$ klein genug)

$$\int_a^t L \, \|y_1(s) - y_2(s)\|\, ds \leq L\, \delta \, \overbrace{\sup_{s \in [a, a+\delta]} \|y_1(s) - y_2(s)\|}^{=: S_\delta}$$

$\Rightarrow \quad s_\delta \leq (L\delta)\, s_\delta$

$\Rightarrow$ Für $\delta < \frac{1}{L}$ ist $L\delta < 1$, also $s_\delta = 0$

Man überlegt sich, dass

$$\sup\{t \in I;\ y_1 = y_2 \text{ auf } [a,t]\} = \sup I$$

$\Rightarrow \quad y_1 = y_2$ auf $I \cap \mathbb{R}_{\geq a}$. Genauso folgt: $y_1 = y_2$ auf $I \cap \mathbb{R}_{\leq a}$. $\boxtimes$

<u>Satz 4.8</u> (Picard-Lindelöf)

Sei $f: G \to \mathbb{R}^n$ $(G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$ stetig und $(t_0, y_0) \in G$

$\Rightarrow$ Das AWP

$$(*) \qquad y' = f(t,y), \quad y(t_0) = y_0$$

besitzt

(a) eine eindeutige Lösung $y: I \to \mathbb{R}^n$, wenn $G = I \times \mathbb{R}^n$ ist mit einem Intervall $I \subset \mathbb{R}$ und f auf ganz G einer Lipschitzbedingung in y gleichmäßig in t genügt.

(b) eine eindeutige maximale Lösung $y: J_{max} \to \mathbb{R}^n$ auf einem offenen Intervall $J_{max} \subset \mathbb{R}$ mit $t_0 \in J_{max}$, falls $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen ist und f auf G lokal Lipschitz in y ist.

(y <u>maximal</u> heißt: $\varphi: J \to \mathbb{R}^n$ Lösung von $(*)$ auf einem offenen Intervall J $\Rightarrow$ $J \subset J_{max}$ und $\varphi = y|_J$)

<u>Idee für den globalen Fall</u> $G = I \times \mathbb{R}^n$, $I = [a,b]$, $t_0 = a$:

Sei $\| f(t,y) - f(t,\tilde{y}) \| \leq L \| y - \tilde{y} \|$ $\forall (t,y), (t,\tilde{y}) \in G$.

Auf $V := C(I, \mathbb{R}^n)$ wird durch

$$\|\varphi\|_L := \sup_{t \in I} \| e^{-2L|t-a|} \varphi(t) \|$$

eine vollständige Norm definiert. Die Abbildung $T: V \to V$,

$$(T\varphi)(t) := y_0 + \int_a^t f(s,\varphi(s))\,ds$$

ist eine Kontraktion

$$\|(T\varphi)(t) - (T\psi)(t)\| \le \int_a^t \underbrace{\|f(s,\varphi(s)) - f(s,\psi(s))\|}_{\le L\,\|\varphi(s)-\psi(s)\|\,e^{-2L(s-a)}\,e^{2L(s-a)}}\,ds$$

$$\le L\,\|\varphi-\psi\|_L \int_a^t e^{2L(s-a)}\,ds \le L\,\|\varphi-\psi\|_L\,\frac{e^{2L(t-a)}}{2L}$$

$$\Rightarrow \quad \|T\varphi - T\psi\|_L = \sup_{t\in I} \frac{\text{Linke Seite}}{e^{2L(t-a)}} \le \frac{1}{2}\,\|\varphi-\psi\|_L$$

Nach dem Banachschen FPS (Satz 1.5) gibt es ein $y \in V = C^1(I,\mathbb{R}^n)$ mit

$$y = Ty$$

oder ausführlich mit

$$y(t) = y_0 + \int_a^t f(s,y(s))\,ds \quad \forall t \in I$$

$$\Rightarrow \quad y'(t) = f(t,y(t)) \quad \forall t\in I \qquad \boxtimes$$

B Einige spezielle Differentialgleichungen

Seien $I, J \subset \mathbb{R}$ Intervalle

(1) Getrennte Variablen: Seien $g \in C(I)$, $h \in C(J)$ mit $0 \notin h(J)$

Gesucht: Lösungen des AWP's

$$y' = g(t)\,h(y), \quad y(t_0) = y_0 \qquad \left(\begin{array}{l} G = I\times J \\ f(t,y) = g(t)\,h(y)\end{array}\right)$$

Seien $G(t) = \int g(t)\,dt \quad (t\in I)$, $H(y) = \int \frac{dy}{h(y)} \quad (y \in J)$

Stammfkt'en zu $g: I\to\mathbb{R}$, $\frac{1}{h}: J\to\mathbb{R}$. Dann ist wegen

$$H'(y) = \frac{1}{h(y)} \neq 0 \quad \forall y\in J$$

nach dem ZWS $H' > 0$ auf J oder $H' < 0$ auf J. In jedem Fall ist H streng monoton und $H: J \to H(J)$ bijektiv.

Ist $I_0 \subset \mathbb{R}$ ein Intervall mit $G(I_0) \subset H(J)$, so definiert

(*) $$y(t) = H^{-1}(G(t)) \qquad (t \in I_0)$$

eine differenzierbare Fkt. mit (Satz 11.1.6 in [Bildhauer])

$$y'(t) = \frac{G'(t)}{H'(H^{-1}(G(t)))} = g(t)\, h(y(t)) \quad \forall t \in I_0$$

Sind $t_0 \in I$, $y_0 \in J$ und wählt man

(**) $$G(t) = \int_{t_0}^{t} g(s)\,ds \;, \quad H(y) = \int_{y_0}^{y} \frac{du}{h(u)} \;,$$

so löst (*) wegen $y(t_0) = H^{-1}(G(t_0)) = H^{-1}(0) = y_0$ das AWP

$$y' = g(t)\, h(y) \;, \quad y(t_0) = y_0 .$$

Ist umgekehrt $y: I_0 \to \mathbb{R}$ Lösung dieses AWP's auf einem Intervall $I_0 \subset I$ und sind G, H wie in (**), so folgt wegen

$$(H \circ y)'(t) = H'(y(t))\, y'(t) = \frac{y'(t)}{h(y(t))} = g(t) = G'(t) \quad \forall t \in I_0 ,$$

$$(H \circ y)(t_0) = H(y_0) = 0 = G(t_0),$$

dass $H(y(t)) = G(t)$ ist $\forall\, t \in I_0$ und damit

$$y(t) = H^{-1}(G(t)) \quad \forall\, t \in I_0 .$$

Wir fassen die obigen Ergebnisse zusammen:

Satz 4.9 Seien $g \in C(I)$, $h \in C(J)$ mit $0 \notin h(J)$, $(t_0, y_0) \in I \times J$ und sei $I_0 \subset I$ ein Intervall mit $t_0 \in I$. Seien

$$G: I \to \mathbb{R},\; G(t) = \int_{t_0}^{t} g(s)\,ds \;, \quad H: J \to \mathbb{R},\; H(y) = \int_{y_0}^{y} \frac{du}{h(u)} .$$

Dann gibt es eine Lösung $y: I_0 \to \mathbb{R}$ des AWP's

$$y' = g(t)\, h(y) \;, \quad y(t_0) = y_0$$

genau dann, wenn $G(I_0) \subset H(J)$ ist. In diesem Fall ist

$$y(t) = H^{-1}(G(t)) \quad \forall\, t \in I_0 .$$

Sind

$$G(t) = \int g(t)\,dt \quad , \quad H(y) = \int \frac{dy}{h(y)}$$

Stammfunktionen und ist $I_0 \subset I$ ein Intervall, $c \in \mathbb{R}$ eine Konstante so, dass die Funktion

$$y(t) = H^{-1}\left(G(t) + c\right) \qquad (t \in I_0)$$

wohldefiniert ist (das heißt, für die $G(t) + c \in H(J)$ ist $\forall\, t \in I_0$), so löst $y : I_0 \to \mathbb{R}$ die DG

(*) $\quad y' = g(t)\,h(y).$

<u>Merkregel</u>: Schreibe $\frac{dy}{dt} = g(t)\,h(y)$ als

$$g(t)\,dt = \frac{dy}{h(y)}.$$

Sind

$$G(t) = \int g(t)\,dt \quad , \quad H(y) = \int \frac{dy}{h(y)}$$

irgendwelche Stammfunktionen, so bilden die Funktionen

$$y(t) = H^{-1}\left(G(t) + c\right) \qquad (c \in \mathbb{R})$$

Lösungen der DG (*), sofern sie wohldefiniert sind.

<u>Beispiel 4.10</u> Gegeben sei das AWP

$$y' = ty \quad , \quad y(0) = e \qquad \left((t,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{>0} \right).$$

Setze $g : I = \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(t) = t$, $h : J = \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$, $h(y) = y$.

Stammfunktionen zu g und $\frac{1}{h}$ mit $G(0) = 0 = H(e)$ sind

$$G(t) = \int_0^t s\,ds = \frac{1}{2}t^2$$

$$H(y) = \int_e^y \frac{du}{u} = \ln(y) - 1 \quad \left(= z \Leftrightarrow y = e^{z+1} \right).$$

Also ist $H(J) = \mathbb{R}$ und $H^{-1}(z) = e^{z+1}$ $\forall z \in \mathbb{R}$. Nach <u>Satz 4.9</u> ist

$$y : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad , \quad y(t) = H^{-1}(G(t)) = e^{\frac{1}{2}t^2 + 1}$$

die eindeutige Lösung des AWP's

$$y' = ty \quad , \quad y(0) = e$$

auf $\mathbb{R}$.

(2) <u>Die Substitution $z = at + by + c$</u>

Sei $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und seien $a, b, c \in \mathbb{R}$ mit $b \neq 0$.

<u>Satz 4.11</u> Die Fkt. $y: I \to \mathbb{R}$ löst die DG

(*) $\quad y' = F(at + by + c)$

genau dann, wenn die Fkt $z: I \to \mathbb{R}$, $z(t) = at + by(t) + c$ die DG

(**) $\quad z' = a + b F(z)$

löst.

<u>Beweis.</u> Aus $y'(t) = F(at + by(t) + c)$ $\forall t \in I$ folgt

$$z'(t) = \frac{d}{dt}\left(at + by(t) + c\right) = a + bF(at + by(t) + c) = a + bF(z(t)) \; \forall t \in I.$$

Zurück kommt man genauso (Prüfen!) $\boxtimes$

(**) ist eine DG mit getrennten Variablen

$$z'(t) = g(t)h(z) \quad \text{mit } g \equiv 1, \; h(z) = a + bF(z).$$

<u>Beispiel 4.12</u> Die DG

(*) $\quad y' = \sin^2(t - y) \qquad$ (d.h. $F(z) = \sin^2(z)$, $a = 1$, $b = -1$, $c = 0$)

geht durch die Substitution $z(t) = t - y(t)$ über in

(**) $\quad z' = 1 - \sin^2(z) = g(t)h(z)$ mit $g \equiv 1$, $h(z) = 1 - \sin^2(z) = \cos^2(z)$.

Für $z \in J :=]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ ist $h(z) = \cos^2(z) \neq 0$. Trennung der Variablen mit den Stammfunktionen

$$G(t) = \int g(t)\,dt = t \quad , \; H(z) = \int \frac{dz}{h(z)} = \int \frac{dz}{\cos^2 z} = \tan z$$

liefert die Lösungen

$$z(t) = H^{-1}(G(t) + c) = \arctan(t + c) \qquad (c \in \mathbb{R})$$

von (**) auf $\mathbb{R}$. Nach <u>Satz 4.11</u> lösen die Fkt'en

$$y(t) = t - z(t) = t - \arctan(t + c) \qquad (c \in \mathbb{R})$$

die DG (*) auf $\mathbb{R}$

(3) Substitution $z = \frac{y}{t}$

Sei $F : J \to \mathbb{R}$ stetig auf einem Intervall $J \subset \mathbb{R}$

Satz 4.13 Eine Funktion $y : I \to \mathbb{R}$ $(I \subset \mathbb{R}\setminus\{0\})$ löst die DG

$(*)$ $$y' = F\left(\frac{y}{t}\right)$$

genau dann, wenn die Funktion $z : I \to \mathbb{R}$, $z(t) := \frac{y(t)}{t}$ die DG

$(**)$ $$z' = \frac{1}{t}\left(F(z) - z\right)$$

löst.

Beweis. Löst y die DG $(*)$, so folgt für $t \in I$

$$z'(t) = \frac{d}{dt}\left(\frac{y(t)}{t}\right) = \frac{1}{t}\left(y'(t) - \frac{y(t)}{t}\right) = \frac{1}{t}\left(F\left(\frac{y(t)}{t}\right) - \frac{y(t)}{t}\right) = \frac{1}{t}\left(F(z(t)) - z(t)\right)$$

Die umgekehrte Implikation folgt analog. $\boxtimes$

Beispiel 4.14 Gesucht: Lösung des AWP's

$(*)$ $$y' = 1 + \frac{y}{t} + \frac{y^2}{t^2} = F\left(\frac{y}{t}\right), \quad y(1) = 0 =: y_0$$

Die Substitution $z = \frac{y}{t}$ führt zu

$(**)$ $$z' = \frac{1}{t}\left(F(z) - z\right) = \frac{1}{t}\left(1 + z^2\right) = g(t)\,h(z), \quad z(1) = 0 =: z_0$$

mit $g(t) = \frac{1}{t}$, $h(z) = 1 + z^2$.

Trennung der Variablen: Für

$$G(t) = \int_1^t g(s)\,ds = \ln t$$

$$H(z) = \int_0^z \frac{du}{h(u)} = \int_0^z \frac{1}{1+u^2}\,du = \arctan z$$

gilt $H(\mathbb{R}) = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ und

$$H^{-1} : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}, \quad H^{-1}(z) = \tan z$$

Wegen $G(t) \in H(\mathbb{R}) \iff t \in \left(e^{-\frac{\pi}{2}}, e^{\frac{\pi}{2}}\right)$ definiert

$$z : \left(e^{-\frac{\pi}{2}}, e^{\frac{\pi}{2}}\right) \to \mathbb{R}, \quad z(t) = H^{-1}(G(t)) = \tan(\ln t)$$