



Übungen zur Vorlesung Höhere Mathematik für Ingenieure IVa
Sommersemester 2017

Blatt 1

Abgabetermin: 12.05.2017

Bemerkung: Die Abgabe der Blätter erfolgt immer Freitags bis 12:00 Uhr in Briefkasten Nr. 45 in Gebäude E2.5.

Aufgabe 1

(1+1+3+2=7 Punkte)

- (a) Zeigen Sie mit Hilfe des Zwischenwertsatzes, dass die Gleichung

$$xe^{1-x} = \frac{1}{2} \quad (1)$$

eine Lösung im Intervall $[0,1]$ besitzt.

- (b) Zeigen Sie, dass $x \in [0,1]$ genau dann eine Lösung von (1) ist, wenn x Fixpunkt der Funktion

$$f: [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \frac{1}{2}e^{x-1}$$

ist.

- (c) Zeigen Sie, dass die Funktion f aus Teil (b) den Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes (Satz 1.5) genügt und folgern Sie, dass (1) genau eine Lösung $\bar{x} \in [0,1]$ besitzt.
- (d) Es sei $\bar{x} \in [0,1]$ der nach Teil (c) eindeutig bestimmte Fixpunkt der Funktion f aus Teil (b). Berechnen Sie, wieviele Iterationsschritte in der Fixpunktiteration $x_{k+1} = f(x_k)$ ($k \in \mathbb{N}$) a priori nötig sind, um ausgehend vom Startwert $x_0 = 1$ eine Fehlerabschätzung $|x_k - \bar{x}| < 10^{-4}$ zu garantieren.

Aufgabe 2

(2+2=4 Punkte)

- (a) Zeigen Sie für die Matrixnormen

$$\|\cdot\|_\alpha: M(n, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R} \quad (\alpha = 1, 2, \infty),$$

dass

$$\|Ax\|_\alpha \leq \|A\|_\alpha \|x\|_\alpha \quad \text{und} \quad \|AB\|_\alpha \leq \|A\|_\alpha \|B\|_\alpha$$

für alle $A, B \in M(n, \mathbb{R})$, $x \in \mathbb{R}^n$ gilt.

- (b) Es sei $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in M(n, \mathbb{R})$. Zeigen Sie, dass

$$\|A\|_\infty = \max_{i=1, \dots, n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|.$$

(Hinweis : Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass

$$\sup_{\|x\|_\infty \leq 1} \left| \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right| = \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$$

für jedes $i \in \{1, \dots, n\}$ gilt.)

(bitte wenden)

Aufgabe 3

(4 Punkte)

Zeigen Sie mit Hilfe des Banachschen Fixpunktsatzes, dass das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\sqrt{1+y^2} \\ \frac{1}{4}(\sin(x) + \sin(y)) \end{pmatrix}$$

in $D = [-1, 0] \times [-1, 0]$ genau eine Lösung besitzt. (Hinweis : Verwenden Sie Aufgabe 2(b), um die Kontraktionsbedingung einer geeignet gewählten Hilfsfunktion zu zeigen.)

Aufgabe 4

(2+2=4 Punkte)

- (a) Geben Sie, gemäß dem Newton-Verfahren, für einen festen Startwert $x_0 \in (0, \infty)$ eine Iterationsfolge $(x_k)_{k \geq 0}$ zur Bestimmung der q -ten Wurzel von a an, wobei $q > 1$ und $a > 0$ gelte. (Hinweis : Der Grenzwert x der gesuchten Iterationsfolge $(x_k)_{k \geq 0}$ erfüllt die Gleichung $x^q - a = 0$. Eine Anwendung von Satz 1.12 liefert die Konvergenz der Iterationsfolge. Letzteres müssen Sie **nicht** ausführen.)
- (b) Berechnen Sie mit Hilfe der in Teil (a) definierten Iterationsfolge die ersten vier Iterationsschritte zur Approximation von $\sqrt[3]{5}$ ausgehend vom Startwert $x_0 = 5$. Vergleichen Sie den Wert von x_4 mit dem exakten Wert von $\sqrt[3]{5}$. (Hinweis : Benutzen Sie einen Taschenrechner und rechnen Sie nach jeder Iteration mit dem auf zwei Nachkommestellen gerundeten Wert für x_k weiter)
-

Die Übungsblätter finden Sie auch auf unserer Homepage:

<https://www.math.uni-sb.de/ag/eschmeier/lehre/ss17/hmi4a/uebungen.html>