UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Jörg Eschmeier
M.Sc. Daniel Kraemer

Übungen zur Vorlesung Höhere Mathematik für Ingenieure IVa

Sommersemester 2017

Blatt 2 Abgabetermin: 26.05.2017

Aufgabe 5 (2+2+3+1=8 Punkte)

Die Schnittpunkte der Ellipse

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$$

mit dem Kreis

$$x^2 + y^2 = 3$$

sollen numerisch bestimmt werden.

(a) Geben Sie das zugehörige Nullstellenproblem $f(x,y) = (0,0)$ $((x,y) \in \mathbb{R}^2)$, mit einer Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ an und berechnen Sie die Nullstellen von f explizit.

(b) Zeigen Sie, dass für jeden Startvektor $v_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ mit $x_0 \neq 0 \neq y_0$ die Rekursionsfolge $v_k = (x_k, y_k)$ $(k \geq 1)$ für das Newton-Verfahren zur Bestimmung von Nullstellen von f gegeben ist durch

$$v_{k+1} = \begin{pmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x_k}{2} + \frac{1}{x_k} \\ \frac{y_k}{2} + \frac{1}{2y_k} \end{pmatrix} \qquad (k \in \mathbb{N}).$$

(c) Zeigen Sie, dass das Iterationsverfahren aus Teil (b) für alle Startvektoren $v_0 = (x_0, y_0) \in [\sqrt{2}, \infty) \times [1, \infty)$ konvergiert und bestimmen Sie den Grenzwert.(*Hinweis : Zeigen Sie zunächst, dass*

$$\sqrt{2} \leq \tfrac{1}{x} + \tfrac{x}{2} \leq x \quad \textit{und} \quad 1 \leq \tfrac{y}{2} + \tfrac{1}{2y} \leq y$$

für $(x,y) \in [\sqrt{2}, \infty) \times [1, \infty)$ *gilt und folgern Sie, dass die Folgen* $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *und* $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *monoton fallend und nach unten beschränkt sind.*)

(d) Begründen Sie, warum der Startvektor $v_0 = (0,0)^t$ zum Auffinden einer Nullstelle der Funktion f aus Teil (a) mit dem Newton-Verfahren nicht geeignet ist.

Aufgabe 6 (1+2+2+2=7 Punkte)

Gegeben Sei die Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \times (\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{3\pi}{2}) \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad (x,y) \longmapsto \tfrac{1}{2}(x-2)^2 + \cos(y).$$

(a) Geben Sie die notwendige Bedingung für die Existenz lokaler Extrema der gegebenen Funktion f an.

(b) Geben Sie die Iterationsgleichung für das Newton-Verfahren zur Bestimmung kritischer Punkte von f an.

(bitte wenden)

(c) Sei $g = \text{grad}(f)$. Zeigen Sie mit Aufgabe 2, dass

$$\|J_g(x,y)^{-1}(J_g(\tilde{x},\tilde{y}) - J_g(x,y))\|_\infty \leq \frac{1}{|\cos(y)|}\|(\tilde{x},\tilde{y}) - (x,y)\|_\infty$$

ist. (*Hinweis : cos(y) ist Lipschitz-stetig mit Konstante 1.*)

(d) Schließen Sie, dass das Iterationsverfahren aus Teil (b) für jeden Startvektor $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ mit $\|(x_0, y_0) - (2, \pi)\|_\infty < \frac{\pi}{4}$ konvergiert und bestimmen Sie den Grenzwert.

Aufgabe 7 **(2+3=5 Punkte)**

Für eine Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die die Form

$$f = f_{a,b}\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad x \longmapsto (x-1)a + (1-2x)b$$

mit unbekannten Parametern $a, b \in \mathbb{R}$ hat, werden die mit Fehlern behafteten Werte

x	0	1	2
$f(x)$	2	4	-2

gemessen. Bestimmen Sie die Parameter $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, die die Fehlerquadrat-Summe

$$\sum_{i=0}^{2} |f_{a,b}(i) - f(i)|^2$$

minimieren, indem Sie:

(a) Ein geeignetes lineares Ausgleichsproblem $\min_{x\in\mathbb{R}^n} \|Ax - y\|_2^2$, wobei $n, m \in \mathbb{N}$, $A \in M(m \times n, \mathbb{R})$ und $y \in \mathbb{R}^m$ geeignet zu wählen sind, formulieren und

(b) dieses mit Hilfe von Satz 2.1 lösen. (*Hinweis : Die Voraussetzungen von Satz 2.1 sollen auch nachgeprüft werden.*)

Aufgabe 8 **(2+2=4 Punkte)**

In der Ebene sind Messpunkte $z_i = (x_i, y_i)^t \in \mathbb{R}^2$ $(i = 1, \ldots, n)$ gegeben. Es soll ein Kreis

$$K(a,r) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-a)^2 + y^2 - r^2 = 0\} \qquad (a \in \mathbb{R}, r > 0)$$

um einen Punkt $(a, 0) \in \mathbb{R}^2$ mit Radius $r > 0$ gezeichnet werden, für den die Summe der Fehlerquadrate

$$\sum_{i=1}^{n} ((x_i - a)^2 + y_i^2 - r^2)^2 = \|((x_i - a)^2 + y_i^2 - r^2)_{i=1}^n\|_2^2$$

minimal wird.

(a) Formulieren Sie diese Aufgabe als nichtlineares Ausgleichsproblem.

(b) Führen Sie, ausgehend vom Startwert $(a_0, r_0)^t = (1,1)^t$ und den vorgegebenen Punkten $z_1 = (0,1)^t$, $z_2 = (1,1)^t$ und $z_3 = (2,-1)^t$, einen Iterationsschritt des Gauß-Newton-Verfahrens durch.

Die Übungsblätter finden Sie auch auf unserer Homepage:

https://www.math.uni-sb.de/ag/eschmeier/lehre/ss17/hmi4a/uebungen.html