



Übungen zur Vorlesung
Höhere Mathematik für Ingenieure IVa
Sommersemester 2017

Blatt 3

Abgabetermin: 09.06.2017

Aufgabe 9

(1+2+1=4 Punkte)

Es sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & -2 \\ -2 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

gegeben. Berechnen Sie

- (i) $\|A\|_1$
- (ii) $\|A\|_2$
- (iii) $\|A\|_\infty$.

Aufgabe 10

(3+2=5 Punkte)

Sei $A \in M(n, \mathbb{R})$ eine reguläre Matrix und seien $b \in \mathbb{R}^n$, $\omega \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ sowie $x_* \in \mathbb{R}^n$ die exakte Lösung des Gleichungssystems $Ax = b$. Sei $B = \frac{1}{\omega}I \in M(n, \mathbb{R})$ und sei $C = I - B^{-1}A \in M(n, \mathbb{R})$ die zugehörige Iterationsmatrix.

- (i) $e_k = x_k - x_*$ bezeichne den Fehlervektor der k -ten Iteration des Richardson-Verfahrens

$$x_{k+1} = x_k - \omega(Ax_k - b) \quad (k \geq 0).$$

Begründen Sie mit zwei Sätzen aus der Vorlesung, dass die Fehlerabschätzung

$$\|e_k\|_2 \leq \rho(I - \omega A)^k \|e_0\|_2 \quad (k \geq 0)$$

gilt, falls die gegebene Matrix A zusätzlich symmetrisch ist.

- (ii) Führen Sie für das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & -4 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 15 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix}$$

zwei Schritte des Richardson-Verfahrens mit $\omega = 0.4$ durch. Wählen Sie als Startvektor $(0, 0, 0)^t$.

(bitte wenden)

Sei $\|\cdot\|$ irgendeine Norm auf $\mathbb{R}^n$ und $\|\cdot\|: M(n, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ die zugehörige Matrixnorm.

Aufgabe 11

(4 Punkte)

Gegeben seien eine reguläre Matrix $A \in M(n, \mathbb{R})$ und ein Vektor $b \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Sei x die exakte Lösung der Gleichung $Ax = b$ und $\tilde{x}$ eine Näherungslösung. Man nennt $e = \|x - \tilde{x}\|$ den absoluten und $r = \|x - \tilde{x}\|/\|x\|$ den relativen Fehler der Näherung $\tilde{x}$. Sei $\tilde{b} = A\tilde{x}$. Zeigen Sie die Gültigkeit der Fehlerabschätzungen

$$e \leq \|A^{-1}\| \|b - \tilde{b}\| \quad \text{und} \quad r \leq \|A\| \|A^{-1}\| \frac{\|b - \tilde{b}\|}{\|b\|}.$$

Die Zahl $\text{cond}(A) = \|A\| \|A^{-1}\|$ nennt man die **Konditionszahl** der Matrix A .

Die Übungsblätter finden Sie auch auf unserer Homepage:

<https://www.math.uni-sb.de/ag/eschmeier/lehre/ss17/hmi4a/uebungen.html>