UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Jörg Eschmeier
M.Sc. Daniel Kraemer

Übungen zur Vorlesung
Höhere Mathematik für Ingenieure IVa
Sommersemester 2017

Blatt 4 Abgabetermin: 23.06.2017

Bemerkung: Bei den mit * gekennzeichneten Aufgaben handelt es sich um Zusatzaufgaben, deren Punkte nicht zu den Gesamtpunkten des Blattes zählen, Ihnen jedoch die Möglichkeit geben, zusätzliche Punkte für die Klausurzulassung zu erwerben.

Aufgabe 12 (3+1+2*=4+2* Punkte)

Sei $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n} \in M(n,\mathbb{R})$ strikt diagonal dominant und seien die Zahlen

$$p_i = \sum_{j=1}^{i-1} \left|\frac{a_{ij}}{a_{ii}}\right| p_j + \sum_{j=i+1}^{n} \left|\frac{a_{ij}}{a_{ii}}\right| \qquad (i = 1,\dots,n)$$

rekursiv definiert.

(a) Zeigen Sie durch Induktion, dass für $i = 1,\dots,n$ gilt

$$p_i \leq \sum_{\substack{j\neq i\\ j=1}}^{n} \left|\frac{a_{ij}}{a_{ii}}\right|.$$

(b) Schließen Sie, dass das Gauß-Seidel-Verfahren unabhängig vom Startwert konvergiert.

(c*) Zeigen Sie durch Induktion, dass für $i = 1,\dots,n$ gilt

$$|(C_{GS}x)_i| \leq p_i \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^n \text{ mit } \|x\|_\infty \leq 1$$

und schließen Sie, dass $\|C_{GS}\|_\infty \leq \|C_{Jac}\|_\infty$.

Aufgabe 13 (1+1+2=4 Punkte)

Sei $C \in M(n,\mathbb{R})$ beliebig und sei $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n} \in M(n,\mathbb{R})$ eine Matrix mit $a_{ii} \neq 0$ für $i = 1,\dots,n$.

(a) Zeigen Sie: $\rho(C) = \rho(C^t)$

(b) Zeigen Sie: Konvergiert das Jacobi-Verahren für das Gleichungssystem $Ax = b$ für jede rechte Seite $b \in \mathbb{R}^n$ und jeden Startvektor $x^0 \in \mathbb{R}^n$, so konvergiert auch das Jacobi-Verfahren für das Gleichungssystem $A^tx = b$ für jede rechte Seite $b \in \mathbb{R}^n$ und jeden Startvektor $x^0 \in \mathbb{R}^n$. (*Hinweis : Nach Satz 3.14 genügt es zu zeigen, dass die beiden Jacobi-Matrizen denselben Spektralradius haben.*)

(bitte wenden)

(c) Führen Sie, ausgehend vom Startvektor $x^0 = (0,0,0)^t$, zwei Schritte des Jacobi-Verfahrens für das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad b = \begin{pmatrix} 7 \\ 10 \\ 6 \end{pmatrix}$$

durch.

Aufgabe 14 **(1+1+2=4 Punkte)**

Betrachten Sie das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad b = \begin{pmatrix} 2 \\ -8 \end{pmatrix}.$$

(a) Zeigen Sie, dass das Gauß-Seidel-Verfahren für obiges Gleichungssystem für jeden Startvektor $x^0 \in \mathbb{R}^2$ konvergiert.

(b) Führen Sie, ausgehend vom Startvektor $x^0 = (1,0)^t$, einen Schritt des Gauß-Seidel-Verfahrens durch.

(c) Es sei $x_* \in \mathbb{R}^2$ die exakte Lösung des Gleichungssystems $Ax = b$. Nach wie vielen Iterationsschritten, ausgehend vom Startvektor x^0 aus Teil (b), kann die Fehlerabschätzung $\|x^k - x_*\|_\infty < 10^{-4}$ garantiert werden?

Die Übungsblätter finden Sie auch auf unserer Homepage:

https://www.math.uni-sb.de/ag/eschmeier/lehre/ss17/hmi4a/uebungen.html