UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Jörg Eschmeier
M.Sc. Daniel Kraemer

Übungen zur Vorlesung
Höhere Mathematik für Ingenieure IVa
Sommersemester 2017

Blatt 5 Abgabetermin: 07.07.2017

Aufgabe 15 (4 Punkte)

Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und sei $I = [a, b]$. Seien $A\colon I \to M(n, \mathbb{R})$ und $b\colon I \to \mathbb{R}^n$ stetige Funktionen und $t_0 \in I$. Zeigen Sie mit Satz 4.8, dass das Anfangswertproblem

$$y' = A(t)y + b(t), \qquad y(t_0) = y_0,$$

für jedes $y_0 \in \mathbb{R}^n$ eine eindeutige Lösung $\varphi\colon I \to \mathbb{R}^n$ hat. Bleibt diese Aussage richtig, wenn man $I = [a, b]$ durch ein offenes Intervall $I = (a, b) \subset \mathbb{R}$ ersetzt? (*Hinweis : Sie dürfen benutzen, dass* $I \to \mathbb{R}, t \mapsto \|A(t)\|$ *eine stetige Funktion ist.*)

Aufgabe 16 (4 Punkte)

Es sei $I = (0, \infty)$. Berechnen Sie die Lösung $y\colon I \to \mathbb{R}$ des Anfangswertproblems

$$y' = \cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{y}{t}\right) + \frac{y}{t}, \qquad y(1) = 0$$

indem Sie es durch Wahl einer geeigneten Substitution in ein Anfangswertproblem mit getrennten Variablen überführen und letzteres lösen.

Aufgabe 17 (2+1+2=5 Punkte)

Sei $f\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine C^2-Funktion und $y\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Lösung des Anfangswertproblems

$$y' = f(t, y), \qquad y(a) = y_0 \tag{1}$$

auf einem kompakten Intervall $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Zeigen Sie:

(a) Ist $\varphi\colon I \to \mathbb{R}$ eine Lösung von (1), so ist $\varphi \in C^3(I)$ und

$$\varphi''(t) = \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)(t, \varphi(t)) + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(t, \varphi(t)) f(t, \varphi(t))$$

für alle $t \in I$.

(b) Es gibt $\varepsilon > 0$ so, dass sich die Funktion $y\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ fortsetzen lässt zu einer Lösung $\hat{y}\colon I \to \mathbb{R}$ des Anfangswertproblems (1) auf dem echt größeren Intervall $I = [a - \varepsilon, b + \varepsilon]$.

(bitte wenden)

(c) Die Verfahrensfunktion $\Phi\colon [a,b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$,

$$\Phi(t,y,h) = f(t,y) + \frac{h}{2}\left[\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)(t,y) + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(t,y) f(t,y)\right]$$

hat die Konsistenzordnung $p = 2$. (*Hinweis : Benutzen Sie die Taylor-Entwicklung mit Restglied 3. Ordnung für $\hat{y}$, um den lokalen Diskretisierungsfehler $\tau(t,h)$ abzuschätzen.*)

Die Übungsblätter finden Sie auch auf unserer Homepage:

https://www.math.uni-sb.de/ag/eschmeier/lehre/ss17/hmi4a/uebungen.html