UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Jörg Eschmeier
M.Sc. Daniel Kraemer

Übungen zur Vorlesung
Höhere Mathematik für Ingenieure IVa
Sommersemester 2017

Blatt 6 Abgabetermin: 21.07.2017

Aufgabe 18 (4 Punkte)

Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$, $I \supset [a, b]$ ein offenes Intervall in $\mathbb{R}$ und $f \in C^2(I \times \mathbb{R}^n)$ eine Funktion mit der Eigenschaft, dass $M = \sup_{x \in [a,b] \times \mathbb{R}^n} \|J_f(x)\| < \infty$ ist. Zeigen Sie, dass das Verfahren von Heun

$$\Phi\colon [a, b] \times \mathbb{R}^n \times [0, h_0] \longrightarrow \mathbb{R}^n, \qquad (t, y, h) \longmapsto \frac{1}{2}[f(t, y) - f(t + h, y + hf(t, y))]$$

Konvergenzordnung $p = 2$ hat. (*Hinweis : Verwenden Sie Satz 5.4 und Satz 1.7*)

Aufgabe 19 (2+2+1=5 Punkte)

Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$y'(t) = t - t^3, \qquad y(0) = 0.$$

Seien $t \in \mathbb{R}_{>0}$ und $n \in \mathbb{Z}_{>0}$. Wenden Sie das explizite Euler-Verfahren an, um die Näherungen y_i $(i = 0, \ldots, n)$ der Werte $y(t_i)$ der exakten Lösung $y(t)$ in den Punkten des Gitters

$$(t_i)_{i=0}^n = (ih)_{i=0}^n$$

mit Schrittweite $h = \frac{t}{n}$ zu berechnen. Zeigen Sie:

(a) $y_i = \frac{h^2}{4}(i-1)i\left(2 - h^2(i-1)i\right)$ für $i = 1, \ldots, n$

(b) $\lim_{n\to\infty} y_n = y(t)$

(c) Teil (b) folgt auch aus einem allgemeinen Ergebnis der Vorlesung.

Aufgabe 20 (2+2=4 Punkte)

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und sei $f \in C^2(I \times \mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$.

(a) Zeigen Sie, dass das lineare 2-Schritt-Verfahren

$$y_{j+2} - y_j = 2hf(t_{j+1}, y_{j+1}) \qquad (j = 0, \ldots n-2)$$

(mit den Bezeichnungen aus der Vorlesung) Konsistenzordnung $p = 2$ hat.

(bitte wenden)

(b) Sei $[a,b] \subset I$ ein kompaktes Intervall. Geben Sie die Verfahrensfunktion

$$\Phi\colon [a,b] \times (\mathbb{R}^N)^3 \times [0,h_0] \longrightarrow \mathbb{R}^N$$

für das obige 2-Schrittverfahren an und formulieren Sie eine Bedingung an die Funktion f, unter der das Verfahren Konvergenzordnung $p = 2$ hat.

Aufgabe 21* **(4* Punkte)**

Für welche Werte von $\gamma \in \mathbb{R}$ ist das lineare Mehrschrittverfahren

$$y_{j+3} + \gamma(y_{j+2} - y_{j+1}) - y_j = h\frac{3+\gamma}{2}(f(t_{j+2}, y_{j+2}) + f(t_{j+1}, y_{j+1}))$$

nullstabil? Benutzen Sie Satz 5.10 der Vorlesung, um Aussagen über die Konsistenzordnung des Verfahrens herzuleiten.

Die Übungsblätter finden Sie auch auf unserer Homepage:

https://www.math.uni-sb.de/ag/eschmeier/lehre/ss17/hmi4a/uebungen.html