UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Jörg Eschmeier
M. Sc. Sebastian Langendörfer

Übungen zur Vorlesung Funktionalanalysis II

Sommersemester 2017

Blatt 1 Abgabetermin: Dienstag, 2.05.2017

Sei E ein lokalkonvexer topologischer Vektorraum über $k = \mathbb{R}$ oder $k = \mathbb{C}$ und sei

$$\mathcal{U}_E(0) = \{U; U \subseteq E \text{ absolutkonvexe Nullumgebung}\}.$$

Eine Menge $B \subseteq E$ heißt beschränkt, falls für alle $U \in \mathcal{U}_E(0)$ ein $\varrho > 0$ mit $B \subseteq \varrho U$ existiert.
Ist F ein weiterer lokalkonvexer topologischer k-Vektorraum und $T : E \to F$ eine lineare Abbildung, so heißt T beschränkt, falls für alle beschränkten Mengen $B \subseteq E$ auch $TB \subseteq F$ beschränkt ist.

Aufgabe 1 (2+2+2*=4 + 2* Punkte)

Seien E, F lokalkonvexe topologische Vektorräume und $T : E \to F$ linear. Zeigen Sie:

(a) T stetig $\Longrightarrow$ T beschränkt

(b) Ist $(p_i)_{i \in I}$ ein erzeugendes Halbnormensystem für E, so ist eine Menge $B \subseteq E$ genau dann beschränkt, wenn alle Mengen $p_i(B) \subseteq \mathbb{R}$ $(i \in I)$ beschränkt sind.

(c) * Sei E ein Banachraum und sei τ_w die schwache Topologie auf E. Untersuchen Sie die Abbildung $\mathrm{id} : (E, \tau_w) \to (E, \|\cdot\|)$ auf Beschränktheit und Stetigkeit.

Aufgabe 2 (1+1+1+1+1=5 Punkte)

Sei E ein lokalkonvexer topologischer Vektorraum und seien $A, B, M_1, \ldots, M_r \subset E$. Zeigen Sie:

(a) A beschränkt $\Longrightarrow$ $\overline{\Gamma(A)}$ beschränkt.

(b) A, B beschränkt $\Longrightarrow$ $A + B = \{a + b;\ a \in A,\ b \in B\}$ beschränkt.

(c) A kompakt $\Longrightarrow$ A beschränkt.

(d) $M_1, \ldots, M_r$ absolutkonvex $\Longrightarrow$

$$\Gamma(M_1 \cup \ldots \cup M_r) = \left\{ \sum_{i=1}^{r} \alpha_i x_i;\ x_i \in M_i \text{ und } \alpha_i \in k \text{ mit } \sum_{i=1}^{r} |\alpha_i| \leq 1 \right\}.$$

(e) $M_1, \ldots, M_r$ absolutkonvex und kompakt $\Longrightarrow$ $\Gamma(M_1 \cup \ldots \cup M_r)$ kompakt.

(bitte wenden)

Aufgabe 3 **(2+2=4 Punkte)**

Seien E, F lokalkonvexe topologische Vektorräume, $B \subset E$ und $T : E \to F$ linear. Zeigen Sie:

(a) B ist beschränkt $\iff$ Für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in B und jede Nullfolge $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in k gilt $\alpha_n x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

(b) T folgenstetig $\Longrightarrow$ T beschränkt.

Aufgabe 4 **(2+2+2*=4+2* Punkte)**

Sei $(K_n)_{n\geq 1}$ eine kompakte Ausschöpfung einer offenen Menge $U \subseteq \mathbb{C}$ und sei

$$E = \mathcal{O}(U) = \{f; f : U \to \mathbb{C} \text{ analytisch}\}$$

versehen mit der Metrik

$$d(f,g) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \frac{\|f-g\|_{K_n}}{1+\|f-g\|_{K_n}} \quad (f, g \in E).$$

Zeigen Sie:

(a) E ist versehen mit der von d induzierten Topologie τ ein Hausdorffscher toplogischer Vektorraum.

(b) Die Halbnormen

$$p_n : E \to \mathbb{R}, p_n(f) = \|f\|_{K_n} \quad (n \in \mathbb{N})$$

erzeugen die lokalkonvexe Topologie τ.

(c) * Eine Menge $B \subseteq E$ ist genau dann beschränkt und abgeschlossen, wenn B kompakt ist.

Hinweis:

Bitte geben Sie Ihre Lösungen zu den Übungsblättern montags vor der Vorlesung ab. In der Woche vom 1. Mai dürfen Sie wegen des Feiertags ausnahmsweise bis Dienstag, 2.05., 14 Uhr im Büro von Sebastian Langendörfer bzw. im Raum der Übung abgeben. Falls Sie früh genug abgeben, ist es möglich, dass Sie Ihre korrigierte Abgabe noch am selben Tag erhalten, ansonsten erfahren Sie Näheres in der Übung. Sie können in Gruppen von maximal drei Studenten abgeben. Einen Schein erhalten Sie, wenn Sie mindestens 50% der Gesamtpunkte aller Übungen erzielen und am Ende des Semesters eine mündliche Prüfung bestehen. Die mit * versehenen Aufgaben gehen dabei nicht in die Berechnung der Gesamtpunkte ein. Die Übungen finden dienstags, 14-16 Uhr in Seminarraum 1 statt. Bei Fragen oder Problemen bezüglich der Übungen wenden Sie sich bitte an Sebastian Langendörfer (Zimmer 4.16, Email: langendo@math.uni-sb.de).

Die Übungsblätter finden Sie auf unserer Homepage:

http://www.math.uni-sb.de/ag/eschmeier/lehre