



Übungen zur Vorlesung Funktionalanalysis II
Sommersemester 2017

Blatt 11

Abgabetermin: Montag, 10.07.2017

Aufgabe 42

(4 Punkte)

Sei $T : E \rightarrow F$ eine stetig lineare Abbildung zwischen lokalkonvexen Hausdorffräumen und $T' : F' \rightarrow E'$, $T'v = v \circ T$ die adjungierte Abbildung. Zeigen Sie, dass gilt:

$$(\ker T)^\perp = \overline{(\operatorname{Im} T')^{\sigma(E', E)}}, \quad {}^\perp(\ker T') = \overline{(\operatorname{Im} T)^{\sigma(F, F')}}.$$

Aufgabe 43

(4 Punkte)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und sei $\mathcal{D}(\Omega)'$ versehen mit der Topologie $\tau_b(\mathcal{D}(\Omega)', \mathcal{D}(\Omega))$. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$j : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathcal{D}(\Omega)', \quad f \mapsto T_f$$

dichtes Bild hat.

Aufgabe 44

(2+2+2+2+1=9 Punkte)

Für einen k -Vektorraum X bezeichne $X^* = \{u; u : X \rightarrow k \text{ linear}\}$ den algebraischen Dualraum. Zeigen Sie:

- (a) X^* ist $\sigma(X^*, X)$ -vollständig.
- (b) Für einen lokalkonvexen Hausdorffraum E ist die kanonische Abbildung

$$j : (E, \sigma(E, E')) \longrightarrow ((E')^*, \sigma((E')^*, E')), \quad j(x)(x') = \langle x, x' \rangle$$

ein topologischer Monomorphismus mit dichtem Bild.

- (c) Ein lokalkonvexer Hausdorffraum E ist genau dann $\sigma(E, E')$ -vollständig, wenn die Abbildung j aus Teil (b) surjektiv ist.
- (d) Ein normierter Raum $(E, \|\cdot\|)$ ist genau dann $\sigma(E, E')$ -vollständig, wenn $\dim E < \infty$ ist.
- (e) Geben sie ein Beispiel eines quasivollständigen lokalkonvexen Hausdorffraumes an, der nicht vollständig ist.

(bitte wenden)

Aufgabe 45**(4 Punkte)**

Sei (E, τ) ein Semi-Montelraum, das heißt ein lokalkonvexer Hausdorffraum, in dem jede beschränkte Menge relativ kompakt ist. Zeigen Sie für eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in E und $x \in E$

$$x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x \text{ bezüglich } \sigma(E, E') \implies x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x \text{ bezüglich } \tau.$$

(Hinweis: Auf abgeschlossenen beschränkten Mengen $B \subset E$ stimmen $\sigma(E, E')$ und τ überein. Benutzen Sie hierzu, dass jede stetige Bijektion zwischen kompakten Hausdorffräumen offen ist.)

Die Übungsblätter finden Sie auch auf unserer Homepage:

<http://www.math.uni-sb.de/ag/eschmeier/lehre>