UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Jörg Eschmeier
M. Sc. Sebastian Langendörfer

Übungen zur Vorlesung Funktionalanalysis II

Sommersemester 2017

Blatt 12 Abgabetermin: Montag, 17.07.2017

Aufgabe 46 (3×2=6 Punkte)

Sei $(E_i)_{i\in I}$ eine Familie lokalkonvexer Hausdorffräume und $E = \prod_{i\in I} E_i$ versehen mit der Produkttopologie. Zeigen Sie:

(a) $\sigma(E, E') = \prod_{i\in I} \sigma(E_i, E_i')$.

(b) Sind alle E_i reflexiv, so ist auch E reflexiv.

(c) Sind alle E_i Montelräume, so ist auch E ein Montelraum.

(*Hinweis: Benutzen Sie Aufgabe 33 und den Satz von Tychonoff.*)

Aufgabe 47 (2+2=4 Punkte)

Seien E, F Fréchеträume und $T \in L(E, F)$. Zeigen Sie:

(a) Ist T injektiv mit abgeschlossenem Bild, so ist $T' : F' \to E'$ surjektiv.

(b) Ist $\operatorname{Im} T \subset F$ abgeschlossen, so gilt $\operatorname{Im} T' = (\ker T)^\perp$.

(*Hinweis: Argumentieren Sie, wie im Fall von Banachräumen und benutzen Sie Aufgabe 11.*)

Aufgabe 48 (1+2+1=4 Punkte)

Seien E, F Fréchеträume und d_E, d_F translationsinvariante Metriken, die die Topologien von E bzw. F erzeugen. Sei $T : E \to F$ eine stetig lineare Abbildung mit der Eigenschaft, dass für jede Nullumgebung $U \in \mathcal{U}_E(0)$ ein $V \in \mathcal{U}_F(0)$ existiert mit $V \subseteq \overline{TU}$. Zeigen Sie:

(a) Für jedes $\epsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$ mit $B_\delta(Tx) \subset \overline{TB_\epsilon(x)}$ für alle $x \in E$.

(b) Zu $\epsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$ mit $B_\delta(0) \subset TB_\epsilon(0)$.
(*Hinweis: Wählen Sie zu $\epsilon_n = \frac{\epsilon}{2^n}$ ein $\delta_n < \frac{1}{n}$ wie in (a) und konstruieren Sie zu $y \in B_{\delta_1}(0)$ eine Cauchy-Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $Tx_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} y$.*)

(c) T ist offen und surjektiv.

(bitte wenden)

Aufgabe 49 **(4 Punkte)**

Seien E, F Frécheträume und $T \in L(E, F)$. Zeigen Sie:

$$T \text{ ist surjektiv} \Longleftrightarrow \text{Für jede beschränkte Menge } B \subset E'_b \text{ ist } (T')^{-1}(B) \subset F'_b \text{ beschränkt.}$$

(*Hinweis: Benutzen Sie für den Beweis von "$\Leftarrow$"das Ergebnis von Aufgabe 48 und für den Beweis von "$\Rightarrow$"die Äquivalenz von starker und schwacher Beschränktheit in F'.*)

Die Übungsblätter finden Sie auch auf unserer Homepage:

http://www.math.uni-sb.de/ag/eschmeier/lehre