UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Jörg Eschmeier
M. Sc. Sebastian Langendörfer

Übungen zur Vorlesung Funktionalanalysis II

Sommersemester 2017

Blatt 13* Abgabetermin: Montag, 24.07.2017

Aufgabe 50* (3* Punkte)

Seien E, F, G Frécheträume und $T \in L(E,F),\ S \in L(F,G)$ stetig lineare Abbildungen so, dass

$$0 \longrightarrow E \xrightarrow{T} F \xrightarrow{S} G \longrightarrow 0$$

eine exakte Sequent ist (d.h. T ist injektiv, S ist surjektiv und $\ker S = \operatorname{Im} T$). Benutzen Sie die Ergebnisse von Aufgabe 42 und Aufgabe 47 um zu zeigen, dass auch

$$0 \longleftarrow E' \xleftarrow{T'} F' \xleftarrow{S'} G' \longleftarrow 0$$

eine exakte Sequenz ist.

Aufgabe 51* (2*+2*=4* Punkte)

Seien E, F lokalkonvexe Hausdorffräume, $T : E \to F$ stetig linear mit $B \subset E$ absolutkonvex. Zeigen Sie:

(a) $F_{TB} = TE_B$ und für die lineare Abbildung $T_B : E_B \to F_{TB},\ x \mapsto Tx$ gilt

$$p_{TB}(Tx) = \inf\{p_B(x-y);\ y \in \ker T_B\}.$$

(b) Ist $B \subset E$ eine beschränkte Banachkugel, so ist $TB \subset F$ eine Banachkugel in F.

Aufgabe 52* (4* Punkte)

Seien $\mathcal{D} = \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ und $\mathcal{D}' = \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$. Sei $f \in \mathcal{D}$ mit $\int_{\mathbb{R}^N} f\,dx = 1$. Für $\epsilon > 0$ sei $f_\epsilon \in \mathcal{D}$ definiert durch $f_\epsilon(x) = \frac{1}{\epsilon^n} f(\frac{x}{\epsilon})$. Zeigen Sie:

$$\lim_{\epsilon \downarrow 0} T_{f_\epsilon} = \delta_0 \text{ in } (\mathcal{D}', \tau_b(\mathcal{D}', \mathcal{D})).$$

(*Hinweis: Betrachten Sie zunächst Konvergenz bzgl.* $\sigma(\mathcal{D}', \mathcal{D})$*.*)

(bitte wenden)

Aufgabe 53* **(2*+2*=4* Punkte)**

Sei $T \in \mathcal{D}'$ und $\varphi \in \mathcal{D}$. Für $x \in \mathbb{R}^N$ bezeichne $\varphi_x \in \mathcal{D}$ die durch $\varphi_x(t) = \varphi(x - t)$ definierte Funktion. Zeigen Sie:

(a) Die Funktion $T * \varphi : \mathbb{R}^N \to \mathbb{C}, \; x \mapsto T(\varphi_x)$ ist stetig.

(b) $T * \varphi$ ist unendlich oft differenzierbar und

$$\partial_i(T * \varphi) = T * (\partial_i \varphi) = (\partial_i T) * \varphi \quad (i = 1, \ldots, n).$$

Die Übungsblätter finden Sie auf unserer Homepage:

http://www.math.uni-sb.de/ag/eschmeier/lehre