**UNIVERSITÄT DES SAARLANDES**
**FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK**
Prof. Dr. Jörg Eschmeier
M. Sc. Sebastian Langendörfer

## Übungen zur Vorlesung Funktionalanalysis II

Sommersemester 2017

**Blatt 2** Abgabetermin: Montag, 8.05.2017

---

### Aufgabe 5 (1+2+2=5 Punkte)

Sei $E$ ein lokalkonvexer Hausdorffraum. Zeigen Sie:

(a) Jedes konvergente Netz in $E$ ist ein Cauchy-Netz.

(b) Jede Cauchy-Folge in $E$ ist beschränkt. Gilt dies auch für Cauchy-Netze?

(c) Ist $K \subset E$ kompakt und $(x_i)_{i \in I}$ ein Cauchy-Netz in $E$ mit $x_i \in K$ für alle $i \in I$, so ist $(x_i)_{i \in I}$ konvergent und der Grenzwert liegt in $K$.

---

### Aufgabe 6 (4 Punkte)

Sei $E$ ein lokalkonvexer Hausdorffraum und $M \subset E$ absolutkonvex und kompakt. Zeigen Sie, dass $E_M = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} nM$ zusammen mit der durch

$$p_M(x) = \inf\{\varrho > 0;\ x \in \varrho M\} \quad (x \in E_M)$$

definierten Halbnorm ein Banachraum ist.

---

### Aufgabe 7 (1+3=4 Punkte)

Zeigen Sie:

(a) Ein abzählbares topologisches Produkt metrisuerbarer lokalkonvexer topologischer Vektorräume ist wieder metrisierbar.

(b) Ein unendliches Produkt nichttrivialer normierter Räume ist niemals normierbar.
(*Hinweis: Zeigen Sie, dass jede Nullumgebung im Produktraum einen nichttrivialen Unterraum enthält.*)

---

**(bitte wenden)**

**Aufgabe 8** **(4 Punkte)**

Wir betrachten

$$s = \left\{ x = (x_n)_{n\geq 1};\ x \text{ Folge in } \mathbb{C} \text{ mit } \|x\|_k = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| n^k < \infty \text{ für alle } k \in \mathbb{N} \right\}.$$

Zeigen Sie, dass $s$ zusammen mit der von dem Halbnormensystem $(\|\cdot\|_k)_{k\in\mathbb{N}}$ erzeugten lokalkonvexen Topologie ein Fréchetraum ist.

---

*Eine Metrik $d$ auf einem $k$-Vektorraum $X$ heißt translationsinvariant, falls $d(x+z, y+z) = d(x,y)$ für alle $x, y, z \in X$ gilt.*

**Aufgabe 9*** **(1*+1*+2*+2*=6* Punkte)**

Sei $X$ ein metrisierbarer lokalkonvexer topologischer Vektorraum. Zeigen Sie:

(a) Es gibt eine translationsinvariante Metrik $d$ auf $X$, die die Topologie von $X$ erzeugt.

(b) Jede translationsinvariante Metrik $d$ auf $X$ erfüllt

$$d(nx, 0) \leq n d(x, 0) \quad (n \in \mathbb{N},\ x \in X).$$

(c) Ist $(x_n)_n$ eine Folge in $X$ mit $x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, so gibt es eine Folge positiver reeller Zahlen $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\gamma_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ und $\gamma_n x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

(d) Für jede translationsinvariante Metrik $d$ auf $X$, die die Topologie von $X$ erzeugt, gilt:

$$X \text{ ist ein Fréchet-Raum} \iff (X, d) \text{ ist ein vollständiger metrischer Raum.}$$

---

Die Übungsblätter finden Sie auf unserer Homepage:

**http://www.math.uni-sb.de/ag/eschmeier/lehre**