UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Jörg Eschmeier
M. Sc. Sebastian Langendörfer

Übungen zur Vorlesung Funktionalanalysis II

Sommersemester 2017

Blatt 3 Abgabetermin: Montag, 15.05.2017

Aufgabe 10 (2+1+1=4 Punkte)

Seien E, F lokalkonvexe topologische Vektorräume. Für $i \in I$ sei $A_i : E \to F$ eine stetige lineare Abbildung.

(a) Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(i) Die Familie $(A_i)_{i \in I}$ ist punktweise beschränkt, das heißt für jedes $x \in E$ ist die Menge $\{A_i x;\ i \in I\}$ beschränkt in F.

(ii) Für jede Nullumgebung ist die Menge $\bigcap\limits_{i \in I} A_i^{-1}(V)$ absorbierend in E.

(b) Sei nun die Topologie auf E von einer vollständigen Metrik erzeugt. Die Familie $(A_i)_{i \in I}$ sei punktweise beschränkt. Zeigen Sie: Für jede abgeschlossene absolutkonvexe Nullumgebung $V \subset F$ ist $T = \bigcap\limits_{i \in I} A_i^{-1}(V)$ eine Nullumgebung in E.
(*Hinweis: Es gilt* $E = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} nT$.)

(c) Welcher Satz aus der FA I ist damit bewiesen?

Aufgabe 11 (2+2+2*=6* Punkte)

Sei (E, τ) ein Fréchetraum und d eine translationsinvariante Metrik auf E, die die Topologie τ erzeugt. Sei $F \subset E$ ein abgeschlossener Teilraum und τ_q die Quotiententopologie von τ auf E/F. Zeigen Sie:

(a) Durch

$$\varrho\left([x], [y]\right) = \inf\{d(x - y, z);\ z \in F\} \quad (x, y \in E)$$

wird eine translationsinvariante Metrik ϱ auf E/F definiert.

(b) Die Quotientenabbildung $q : (E, d) \to (E/F, \varrho)$ ist stetig und offen. Schließen Sie, dass die Topologie τ_q von ϱ erzeugt wird.
(*Hinweis: Es gilt* $q\left(\{x \in E;\ d(x, 0) < \epsilon\}\right) = \{u \in E/F;\ \varrho(u, 0) < \epsilon\}$.)

(c) * Der Raum $(E/F, \tau_q)$ ist ein Fréchetraum.
(*Hinweis: Vergleichen Sie mit dem entsprechenden Beweis im Fall von Banachräumen.*)

(bitte wenden)

Aufgabe 12 **(4 Punkte)**

Sei E ein k-Vektorraum und $u : E \to k$ eine lineare Abbildung. Seien $p_1, \ldots, p_n$ Halbnormen auf E mit

$$|u(x)| \leq \sum_{i=1}^{n} p_i(x) \quad \text{für alle } x \in E.$$

Zeigen Sie: Es existieren lineare Abbildungen $u_1, \ldots, u_n : E \to k$ mit $u = \sum_{i=1}^{n} u_i$ und $|u_i(x)| \leq p_i(x)$ für alle $x \in E$ und alle $i = 1, \ldots, n$.

(*Hinweis: Betrachten Sie die Halbnorm* $p : E^n \to \mathbb{R};\ (x_1, \ldots, x_n) \mapsto \sum_{i=1}^{n} p_i(x_i)$, *identifizieren Sie* E *mit einem geeigneten Teilraum von* E^n *und wenden Sie den Satz von Hahn-Banach für Halbnormen an.*)

Aufgabe 13 **(2+2 = 4 Punkte)**

Sei E ein k-Vektorraum, $\mathcal{P}$ die Menge aller Halbnormen auf E und t die von $\mathcal{P}$ erzeugte lokalkonvexe Topologie auf E. Zeigen Sie:

(a) t ist die feinste lokalkonvexe Topologie auf E und t ist Hausdorffsch.

(b) Jede lineare Abbildung $T : E \to F$ in einen lokalkonvexen topologischen Vektorraum F ist stetig und jeder lineare Teilraum $F \subseteq E$ ist abgeschlossen (wenn man E mit der lokalkonvexen Topologie t versieht).

Die Übungsblätter finden Sie auf unserer Homepage:

http://www.math.uni-sb.de/ag/eschmeier/lehre