UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Jörg Eschmeier
M. Sc. Sebastian Langendörfer

Übungen zur Vorlesung Funktionalanalysis II

Sommersemester 2017

Blatt 4 Abgabetermin: Dienstag, 22.05.2017

Aufgabe 14 (2+2=4 Punkte)

Sei $T : E \to F$ eine lineare Abbildung zwischen lokalkonvexen Hausdorffräumen, $N \subset E$ ein linearer Teilraum mit $T|_N = 0$. Wir betrachten

$$\hat{T} : E/N \to F;\ \hat{T}[x] = Tx.$$

Zeigen Sie:

(a) T ist stetig (offen) $\iff$ $\hat{T}$ ist stetig (offen).

(b) Ist $\dim F < \infty$, so gilt: T ist stetig $\iff$ $\ker T$ ist abgeschlossen.

Sei E ein lokalkonvexer topologischer Vektorraum.
Für $M \subset E$ sei $M^\circ = \{x' \in E';\ |x'(x)| \leq 1$ für alle $x \in M\} \subset E'$.
Für $N \subset E'$ sei ${}^\circ N = \{x \in E;\ |x'(x)| \leq 1$ für alle $x' \in N\} \subset E$.

Aufgabe 15 (4 Punkte)

Sei E ein lokalkonvexer topologischer Vektorraum und sei $\varnothing \neq M \subset E$. Zeigen Sie, dass

$${}^\circ(M^\circ) = \overline{\Gamma(M)}.$$

Sei E ein lokalkonvexer topologischer Vektorraum. Eine Familie $(u_i)_{i\in I}$ von Linearformen $E \to k$ heißt gleichstetig*, falls eine Nullumgebung $U \subset E$ existiert mit $u_i \in U^\circ$ für alle $i \in I$.*

Aufgabe 16 (2+2=4 Punkte)

Sei E ein lokalkonvexer topologischer Vektorraum. Zeigen Sie:

(a) Eine Familie $(u_i)_{i\in I}$ von Linearformen auf E ist genau dann gleichstetig, wenn es eine stetige Halbnorm p auf E gibt, so dass

$$|u_i(x)| \leq p(x) \quad \text{für alle } x \in E \text{ und alle } i \in I.$$

(b) Sei $F \subset E$ ein linearer Teilraum und $(u_i)_{i\in I}$ eine gleichstetige Familie von Linearformen auf F. Dann gibt es eine gleichstetige Familie $(v_i)_{i\in I}$ von Linearformen auf E mit $u_i = v_i|_F$ für alle $i \in I$.

(bitte wenden)

Aufgabe 17 **(2+2=4 Punkte)**

Sei E ein topologischer Vektorraum und seien $A \subset E$ abgeschlossen, $B \subset E$ kompakt mit $A \cap B = \varnothing$. Zeigen Sie:

(a) Es gibt eine Nullumgebung V in E mit $(B + V) \cap A = \varnothing$.

(b) Ist E lokalkonvex und sind A, B zusätzlich konvex, so existieren $u \in E'$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ mit

$$\operatorname{Re} u(x) \ < \ \alpha_1 \ < \ \alpha_2 \ < \ \operatorname{Re} u(y) \quad (x \in A, \ y \in B) \ .$$

(*Hinweis: Benutzen Sie Teil (a) und den Trennungssatz aus der Vorlesung.*)

Die Übungsblätter finden Sie auch auf unserer Homepage:

http://www.math.uni-sb.de/ag/eschmeier/lehre