UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Jörg Eschmeier
M. Sc. Sebastian Langendörfer

Übungen zur Vorlesung Funktionalanalysis II

Sommersemester 2017

Blatt 5 Abgabetermin: Montag, 29.05.2017

Aufgabe 18 **(1+1+2=4 Punkte)**

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge und $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine kompakte Ausschöpfung von Ω. Für jede kompakte Menge $K \subset \Omega$ sei

$$\mathcal{D}(K) = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}^n);\ \operatorname{supp} f \subset K\}$$

versehen mit der Relativtopologie bezüglich $C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Weiter sei

$$\mathcal{D}(\Omega) = \bigcup(\mathcal{D}(K);\ K \subset \Omega \text{ kompakt})$$

versehen mit der induktiven lokalkonvexen Topologie τ der Inklusionen

$$i_K : \mathcal{D}(K) \to \mathcal{D}(\Omega),\ f \mapsto f \quad (K \subset \Omega \text{ kompakt}).$$

Zeigen Sie:

(a) τ ist die induktive lokalkonvexe Topologie bezüglich den Inklusionen $(i_{K_n})_{n\in\mathbb{N}}$.

(b) Die Abbildungen

$$\delta_z : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{C},\ f \mapsto f(z) \quad (z \in \Omega)$$

sind stetig und $\mathcal{D}(\Omega)$ ist Hausdorffsch.

(c) $\mathcal{D}(\Omega)$ ist kein Fréchetraum.
(*Hinweis: Wenden Sie den Satz von Baire auf* $\mathcal{D}(\Omega) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{D}(K_n)$ *an.*)

Aufgabe 19 **(1+1,5+1,5=4 Punkte)**

Zeigen Sie für den Raum $\mathcal{D}(\Omega)$ aus Aufgabe 18:

(a) Für $f \in C(\Omega)$ ist die Abbildung

$$T_f : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{C},\ \varphi \mapsto \int_\Omega f(x)\varphi(x)\,dx$$

linear und stetig.

(b) Die Abbildung $C(\Omega) \to \mathcal{D}(\Omega)',\ f \mapsto T_f$ ist linear und injektiv.
(*Hinweis: Benutzen Sie, dass es zu jeder offenen Teilmenge* $V \subset \mathbb{R}^n$ *ein* $\varphi \in \mathcal{D}(V)$ *gibt mit* $\varphi \geq 0$ *und* $\int_V \varphi\,dx = 1$.)

(c) Ist $f \in C^1(\Omega)$, so gilt für $i = 1, \dots, n$ und $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$

$$T_{\partial_i f}(\varphi) = -T_f(\partial_i\varphi) \quad \text{für alle } \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

(bitte wenden)

Aufgabe 20 **(1,5+1,5+1=4 Punkte)**

Zeigen Sie für den Raum $\mathcal{D}(\Omega)$ aus Aufgabe 18:

(a) Für $f \in C^\infty(\Omega)$ ist $M_f : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathcal{D}(\Omega),\ \varphi \mapsto f \cdot \varphi$ linear und stetig.

(b) Für $D = \sum\limits_{i \in \mathbb{N}^n,\ |i| \le p} a_i D^i$ mit $p \in \mathbb{N},\ D^i = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{i_1} \dots \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{i_n}$ und $a_i \in \mathbb{C}$ ist die Abbildung

$$D : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathcal{D}(\Omega),\ \varphi \mapsto \sum_{|i| \le p} a_i D^i \varphi$$

linear und stetig.

(c) Für $T \in \mathcal{D}(\Omega)',\ f \in C^\infty(\Omega)$ und $i = 1, \dots, n$ definiert man $fT \in \mathcal{D}(\Omega)'$ und $\partial_i T \in \mathcal{D}(\Omega)'$ durch

$$fT(\varphi) = T(f\varphi) \text{ und } \partial_i T(\varphi) = -T(\partial_i \varphi) \quad (\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)).$$

Zeigen Sie:

$$\partial_i(fT) = (\partial_i f)T + f(\partial_i T).$$

Aufgabe 21 **(2+2+2=6 Punkte)**

Sei X ein Banachraum über $\mathbb{C}$ und $\mathcal{L}(X) = \{T;\ T : X \to X \text{ stetig, linear}\}$. Sei τ_{WOT} die durch die Halbnormen

$$\|T\|_{x,u} \;=\; |\langle Tx, u\rangle| \quad (x \in X,\ u \in X')$$

und τ_{SOT} die durch die Halbnormen

$$\|T\|_x \;=\; \|Tx\| \quad (x \in X)$$

erzeugte lokalkonvexe Topologie auf $\mathcal{L}(X)$. Zeigen Sie, dass $(\mathcal{L}(X), \tau_{\text{WOT}})$ und $(\mathcal{L}(X), \tau_{\text{SOT}})$ dieselben abgeschlossenen, konvexen Mengen besitzen.

Beweisen Sie dazu mit Hilfe von Aufgabe 12:

(a) Ist $\lambda : (\mathcal{L}(X), \tau_{\text{SOT}}) \to \mathbb{C}$ stetig linear, so gibt es Linearformen $\lambda_1, \dots, \lambda_n : \mathcal{L}(X) \to \mathbb{C}$ und Vektoren $x_1, \dots, x_n \in X \setminus \{0\}$ mit $\lambda = \sum\limits_{i=1}^n \lambda_i$ und $\lambda_i(T) \le \|Tx_i\|$ für alle $T \in \mathcal{L}(X)$ und $i = 1, \dots, n$.

(b) Für λ_i und x_i aus (a) gibt es eine stetige Linearform $u_i \in X'$ mit

$$u_i(Tx_i) \;=\; \lambda_i(T) \quad (T \in \mathcal{L}(X)).$$

Die Übungsblätter finden Sie auch auf unserer Homepage:

http://www.math.uni-sb.de/ag/eschmeier/lehre