UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Jörg Eschmeier
M. Sc. Sebastian Langendörfer

Übungen zur Vorlesung Funktionalanalysis II

Sommersemester 2017

Blatt 6 Abgabetermin: Dienstag, 06.06.2017

Wegen des Feiertags am 05.06.2017 können Sie ihr Blatt ausnahmsweise bis Dienstag, 14 Uhr im Büro von Sebastian Langendörfer oder in der Übung abgeben.

Aufgabe 22 (2+2=4 Punkte)

(a) Seien $((E_\alpha)_{\alpha\in A}, (\phi_{\alpha\beta})_{\alpha\geq\beta})$ und $((F_\alpha)_{\alpha\in A}, (\pi_{\alpha\beta})_{\alpha\geq\beta})$ projektive Spektren und seien $T_\alpha : E_\alpha \to F_\alpha$ für $\alpha \in A$ stetig linear mit

$$\pi_{\alpha\beta} \circ T_\alpha = T_\beta \circ \phi_{\alpha\beta} \quad \text{für alle } \alpha \geq \beta.$$

Zeigen Sie, dass eine eindeutig bestimmte stetig lineare Abbildung $T : \mathrm{proj}_\alpha E_\alpha \to \mathrm{proj}_\alpha F_\alpha$ existiert mit

$$\pi_\beta \circ T = T_\beta \circ \phi_\beta \quad \text{für alle } \beta \in A.$$

Hierbei seien $\phi_\beta : \mathrm{proj}_\alpha E_\alpha \to E_\beta$ und $\pi_\beta : \mathrm{proj}_\alpha F_\alpha \to F_\beta$ für $\beta \in A$ die kanonischen Projektionen.

(b) Formulieren und beweisen Sie ein entsprechendes Resultat für induktive Spektren.

Aufgabe 23 (1+1+2+2=6 Punkte)

Sei E ein Hausdorffscher lokalkonvexer topologischer Vektorraum und sei $\mathcal{B}$ das System der abgeschlossenen, absolut konvexen und beschränkten Mengen in E.

Sei $E_B = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} nB$ $(B \in \mathcal{B})$, versehen mit dem Minkowskifunktional von B. Zeigen Sie:

(a) $E = \bigcup_{B\in\mathcal{B}} E_B$.

(b) Bezeichnet $\mathrm{ind}_{B\in\mathcal{B}} E_B$ den Raum E, versehen mit der induktiven lokalkonvexen Topologie der Inklusionsabbildungen $i_B : E_B \hookrightarrow E$ $(B \in \mathcal{B})$, so ist $\mathrm{id} : \mathrm{ind}_{B\in\mathcal{B}} E_B \to E$ stetig.

(c) Jede beschränkte lineare Abbildung $T : \mathrm{ind}_{B\in\mathcal{B}} E_B \to F$ in einen lokalkonvexen topologischen Vektorraum F ist stetig.

(d) Die identische Abbildung $\mathrm{id} : \mathrm{ind}_{B\in\mathcal{B}} E_B \to E$ ist genau dann ein topologischer Isomorphismus, wenn jede beschränkte lineare Abbildung $T : E \to F$, F lokalkonvexer topologischer Vektorraum, stetig ist.

(bitte wenden)

Aufgabe 24 **(4 Punkte)**

Sei $E = \mathrm{ind}_{n\in\mathbb{N}} E_n$ der induktive Limes eines abzählbaren strikten Einbettungsspektrums $(E_n)_n$ aus vollständigen lokalkonvexen Hausdorffräumen E_n mit $E_n \neq E$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie: E ist nicht metrisierbar.

(*Hinweis: Sie dürfen benutzen, dass der induktive Limes $E = \mathrm{ind}_{n\in\mathbb{N}} E_n$ eines strikten Einbettungsspektrums aus vollständigen lokalkonvexen Hausdorffräumen quasivollständig ist (Korollar 5.19).*)

Aufgabe 25 **(2+2=4 Punkte)**

(a) Zeigen Sie: Es gibt keine stetige Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ mit

$$\int_{\mathbb{R}} f(t)\varphi(t)\, dt = \varphi(0)$$

für alle $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ (hierbei bezeichne $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ den in Aufgabe 18 definierten Raum).

(b) Sei

$$H : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ H(x) = \begin{cases} 0 & ; \quad x < 0 \\ 1 & ; \quad x \geq 0 \end{cases}.$$

Zeigen sie, dass

$$T_H : D(\Omega) \to \mathbb{R}, \quad \varphi \mapsto \int_{\Omega} H(x)\varphi(x)dx$$

eine wohldefinierte Distribution ist und berechnen Sie deren Ableitung (vgl. Aufgabe 20).

Die Übungsblätter finden Sie auf unserer Homepage:

http://www.math.uni-sb.de/ag/eschmeier/lehre